Zinsrechnung

Wird Kapital vorübergehend zur Verfügung gestellt, so erhält man als Gegenleistung sogenannte Zinsen. Es handelt sich dabei üblicherweise um einen prozentualen Anteil des zur Verfügung gestellten Kapitals. Zur konkreten Berechnung der Zinsen sind im Laufe der Zeit verschiedene Modelle entstanden, welche nachfolgend erläutert werden.

1 Grundbegriffe

Man unterteilt Zinsen anhand verschiedener Gesichtspunkte:

– **Einfache Zinsen und Zinseszinsen:** Für die Berechnung von einfachen Zinsen wird stets nur das ursprünglich zur Verfügung gestellte Kapital herangezogen. Beim Zinseszinsmodell werden hingegen auch die bereits erhaltenen Zinsen verzinst, wodurch sich ein exponentieller Anstieg ergibt. Eine ausführliche Gegenüberstellung befindet sich auf Seite 3.

– **Ganzjährige Zinsen und unterjährige Zinsen:** Bei ganzjährigen Zinsen erstreckt sich der Verzinsungszeitraum über ein ganzes Jahr. Bei unterjährigen Zinsen erfolgen mehrere Verzinsungen pro Jahr (z. B. semesterweise oder monatlich). Eine genaue Erläuterung dieser Modelle erfolgt in den Kapiteln 3 und 4.

– **Dekursive Zinsen und antizipative Zinsen:** Bei der dekursiven Verzinsung wird für die Berechnung der Zinsen das Anfangskapital herangezogen. Die Zinsen werden am Ende der Zinsperiode gutgeschrieben. Diese Art der Verzinsung ist beispielsweise bei Sparbüchern, Konten oder Krediten üblich. In den nachfolgenden Kapiteln werden ausschließlich dekursive Zinsen betrachtet.

  Bei der antizipativen Verzinsung werden die Zinsen bereits am Beginn der Zinsperiode aufgeschlagen und es wird für die Berechnung des momentanen Werts das Endkapital herangezogen. Verwendung findet die antizipative Verzinsung beispielsweise bei einem sogenannten Wechsel. Hier verpflichtet man sich, zu einem späteren Zeitpunkt einen gewissen bereits verzinsten Betrag zu zahlen. Möchte man die Zahlung bereits früher leisten, so wird der Endwert verringert, da die bereits erfolgte Verzinsung teilweise rückgängig gemacht wird.

1.1 Barwert und Endwert

Den ursprünglichen Wert des Kapitals bezeichnet man als Barwert. Im Kontext der Zinsrechnung wird hierfür in mathematischen Formeln die Variable K_0 verwendet. Sie soll den Wert des Kapitals zum Zeitpunkt null, also am Beginn der Verzinsung, symbolisieren.

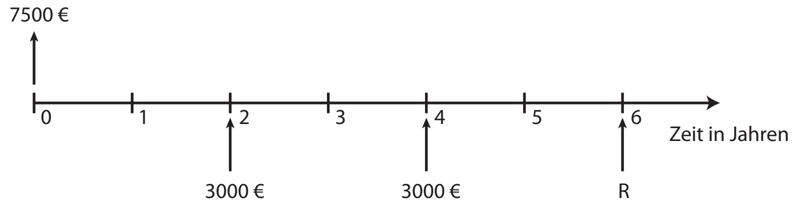
Als Endwert bezeichnet man den Wert, den das Kapital am Ende eines bestimmten Verzinsungszeitraums hat. Man verwendet dafür in mathematischen Formeln die Variable K_n, wobei n für die Anzahl der Jahre steht. Wird das Kapital beispielsweise fünf Jahre lang verzinst, so würde man für den Endwert die Variable K_5 verwenden.

1.2 Zeitachse

Komplexere Zahlungsmodelle, bei denen im Laufe der Zeit mehrere Ein- und Auszahlungen erfolgen, können grafisch auf einer sogenannten Zeitachse dargestellt werden. Diese entspricht im Wesentlichen einem Zahlenstrahl, auf welchem die Jahre aufgetragen werden. Einzahlungen werden durch Pfeile dargestellt, welche von unten in Richtung der Zeitachse zeigen. Auszahlungen werden durch Pfeile dargestellt, welche von der Zeitachse weg nach oben zeigen. Ist die Größe der Zahlungen bekannt, so wird diese in unmittelbarer Nähe zum entsprechenden Pfeil vermerkt. Ansonsten wird der Pfeil mit einer Variable beschriftet.

Beispiel: *Jemand borgt sich heute 7500 € aus. Es wurde vereinbart, dass in zwei Jahren 3000 € zurückgezahlt werden, in vier Jahren ebenfalls 3000 € zurückgezahlt werden und in sechs Jahren die restliche Schuld beglichen wird. Dieser Sachverhalt soll auf einer Zeitachse dargestellt werden.*

Das Ergebnis sieht folgendermaßen aus:



Die Auszahlung des Kredits wird als Pfeil gezeichnet, welcher von der Zeitachse weg zeigt. Die drei Rückzahlungen sind hingegen zur Zeitachse ausgerichtet. Da die Höhe der dritten Rückzahlung unbekannt ist, wurde hierfür die Variable R (für Rest) verwendet. Die Berechnung der Restzahlung erfolgt im Beispiel auf Seite 4. □

1.3 Zinstage

Für die Berechnung der Zinsen ist es notwendig, zu wissen, welcher Zeitraum für die Verzinsung herangezogen wird. Dabei gelten folgende Richtlinien:

– Jedes Monat besitzt 30 Tage und jedes Jahr besitzt 360 Tage.

– Die Tage der Einzahlung und der Auszahlung werden nicht berücksichtigt.

– Der Beginn der Verzinsung ist der erste Werktag nach der Einzahlung.

– Eine Auszahlung kann nur an einem Werktag erfolgen.

Beispiel: *Es soll die Anzahl der Zinstage ermittelt werden, wenn die Einzahlung am 14. Februar 2018 (Mittwoch, kein Feiertag) und die Auszahlung am 24. Mai 2018 (Donnerstag, kein Feiertag) erfolgte.*

Da der 14. Februar selbst nicht zum Verzinsungszeitraum zählt, bleiben für den Februar noch $30 - 14 = 16$ Tage übrig. Der Mai trägt mit 23 Tagen zum Verzinsungszeitraum bei, da der Tag der Auszahlung nicht dazu zählt. Die beiden ganzen Monate März und April werden jeweils mit 30 Tagen gezählt. Somit umfasst der Verzinsungszeitraum insgesamt $16 + 2 \cdot 30 + 23 = 99$ Tage. □

2 Einfache Verzinsung

In der Praxis wird die einfache Verzinsung u. a. verwendet, um die Zinsen innerhalb einer Zinsperiode zu berechnen (siehe gemischte Verzinsung, Seite 5). Hierbei wird für die Berechnung der Zinsen immer nur das ursprüngliche Kapital herangezogen. Die anfallenden Zinsen werden nicht berücksichtigt. Für die Berechnung des Endwertes gilt folgende Formel:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$$

Dabei ist K_0 der Barwert, n die Verzinsungsdauer (in Jahren), i der Jahreszinssatz und K_n der Endwert (nach n Jahren). Falls die Verzinsungsdauer in Tagen vorliegt, werden die Zinstage T mittels $n = \frac{T}{360}$ in Jahre umgerechnet.

Es handelt sich bei der einfachen Verzinsung um ein lineares Wachstum. Dies wird deutlich, wenn man $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$ umformt und in Form einer Funktionsgleichung anschreibt:

$$K(n) = K_0 \cdot i \cdot n + K_0$$

Die Steigung, also der jährliche Kapitalzuwachs, entspricht hier dem Wert $K_0 \cdot i$.

3 Ganzjährige Zinseszinsen

Bei ganzjährigen Zinseszinsen wird das Kapital in Abständen von jeweils einem Jahr zu einem bestimmten Jahreszinssatz verzinst. Häufig ist hinter diesem Zinssatz die Abkürzung p. a. zu sehen, was „pro anno" bzw. „per annum" (also pro Jahr bzw. jährlich) bedeutet. Dieser Zusatz ist durchaus sinnvoll, da es auch andere Verzinsungsperioden gibt (siehe Seite 6) und es auf diese Weise keine Verwechslungsgefahr gibt.

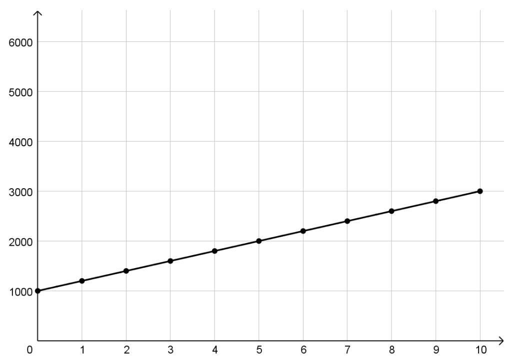
Im Vergleich zur einfachen Verzinsung im vorherigen Kapitel werden hier für die Ermittlung der neuen Zinsen die bereits erhaltenen Zinsen ebenfalls berücksichtigt. Somit steigt der Grundwert von Jahr zu Jahr um den selben Faktor an, weshalb es sich hier um exponentielles Wachstum handelt. Die zugehörige Formel für den Endwert K_n nach n Jahren lautet folgendermaßen:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

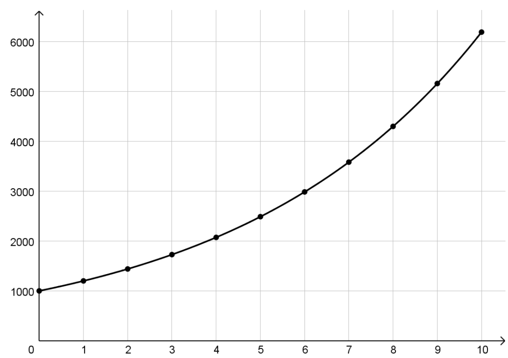
Dabei ist K_0 der Barwert und i der Jahreszinssatz.

3.1 Gegenüberstellung

In der folgenden Gegenüberstellung wird ein Kapital von 1000 € jeweils zehn Jahre lang mit 20 % p. a. verzinst. Links wird die einfache Verzinsung und rechts das Zinseszinsmodell verwendet.



einfache Verzinsung



Zinseszinsen

Man erkennt, dass das Kapital bei der einfachen Verzinsung jedes Jahr um 200 € (also 20 % vom Barwert) anwächst. Beim Zinseszinsmodell steigt das Kapital jedes Jahr um 20 % des aktuellen Wertes. Somit ist der Zuwachs von Jahr zu Jahr größer und es ergibt sich ein exponentielles Wachstum.

3.2 Das Äquivalenzprinzip

Grundsätzlich können verschiedene Zahlungsströme nicht einfache durch Addieren der einzelnen Zahlungen verglichen werden, da aufgrund der Verzinsung nicht nur die Höhe der Zahlungen sondern auch deren Zeitpunkt entscheidend ist.

Das Äquivalenzprinzip besagt, dass zum Vergleich verschiedener Zahlungsströme alle Zahlungen auf einen gemeinsamen Bezugszeitpunkt auf- bzw. abgezinst werden müssen, bevor sie addiert werden. Dieser Bezugszeitpunkt kann grundsätzlich frei gewählt werden. Durch sinnvolle Wahl kann die Rechnung jedoch oft deutlich vereinfacht werden.

Um einen Zahlungsstrom K um n Jahre nach vor zu verzinsen (auch „aufzinsen" genannt), wird $K \cdot (1+i)^n$ verwendet. Um einen Zahlungsstrom K um n Jahre zurück zu verzinsen (auch „abzinsen" genannt), wird $K \cdot (1+i)^{-n}$ verwendet.

Beispiel: *Jemand borgt sich heute 7500 € aus. Als Zinssatz wurden 8 % vereinbart. Außerdem wurde vereinbart, dass in zwei Jahren 3000 € zurückgezahlt werden, in vier Jahren ebenfalls 3000 € zurückgezahlt werden und in sechs Jahren die restliche Schuld beglichen wird. Es soll berechnet werden, wie groß diese Restschuld ist.*

Eine Zeitachse dieses Sachverhalts befindet sich im Beispiel auf Seite 2. Als Bezugszeitpunkt ist hier der Beginn sinnvoll. Aufgrund des Äquivalenzprinzips müssen alle auf den Beginn abgezinsten Rückzahlungen 7500 € ergeben. Man erhält somit folgende Gleichung:

$$7500 = 3000 \cdot 1{,}08^{-2} + 3000 \cdot 1{,}08^{-4} + R \cdot 1{,}08^{-6}$$

Durch Lösen dieser Gleichung ergibt sich als Restschuld $R \approx 4320{,}89$ €. □

3.3 Durchschnittlicher Zinssatz

Bisher wurde der Zinssatz über den gesamten Verzinsungszeitraum hinweg als konstant betrachtet. In diesem Abschnitt wird der Fall behandelt, dass er sich von Jahr zu Jahr ändern kann. Um verschiedene Angebote vergleichen zu können, ist es jedoch sinnvoll, zu berechnen, welchem konstanten Zinssatz diese jährlich variierenden Zinssätze entsprechen würden. Man spricht dabei vom effektiven Zinssatz i_{eff} (auch durchschnittlicher Zinssatz genannt).

Herleitung: Angenommen der Zinssatz beträgt im ersten Jahr i_1, im zweiten Jahr i_2 und im dritten Jahr i_3. Dann ist der Endwert des verzinsten Kapitals K_0 gegeben durch

$$K_3 = K_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3).$$

Würde man das Kapital drei Jahre lang mit dem konstanten Zinssatz i_{eff} verzinsen, so wäre die Formel für den Endwert

$$K_3 = K_0 \cdot (1 + i_{\text{eff}})^3.$$

Da bei beiden Modellen derselbe Endwert resultieren soll, kann man i_{eff} bestimmen, indem man die beiden Terme für K_3 gleichsetzt:

$$K_0 \cdot (1 + i_{\text{eff}})^3 = K_0 \cdot (1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3)$$

Nachdem K_0 gekürzt wurde, die dritte Wurzel gezogen wurde und 1 subtrahiert wurde, erhält man

$$i_{\text{eff}} = \sqrt[3]{(1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdot (1 + i_3)} - 1.$$

■

Die allgemeine Formel für den effektiven Zinssatz mit einer Verzinsungsdauer von n Jahren und den Jahreszinsen $i_1, i_2, ..., i_n$ lautet

$$i_{\text{eff}} = \sqrt[n]{(1 + i_1) \cdot (1 + i_2) \cdots (1 + i_n)} - 1.$$

Aus mathematischer Sicht handelt es sich bei $i_{\text{eff}} + 1$ um den geometrischen Mittelwert aller Faktoren $1 + i_k$. Dieser ist immer kleiner oder gleich dem arithmetischen Mittelwert.

Beispiel: *Ein Kapital wird zunächst sechs Jahre lang mit 1,2 % verzinst, anschließend drei Jahre lang mit 0,9 % und zuletzt ein Jahr lang mit 2,5 %. Es soll der effektive Zinssatz berechnet werden.*

Insgesamt beträgt die Verzinsungsdauer $6+3+1 = 10$ Jahre. Daher wird die entsprechende Wurzel verwendet. Innerhalb der Wurzel kann man die gleichen Zinssätze als Potenz zusammenfassen:

$$i_{\text{eff}} = \sqrt[10]{1{,}012^6 \cdot 1{,}009^3 \cdot 1{,}025} - 1 \approx 0{,}0114$$

Der effektive Zinssatz ist daher ca. 1,14 %. Zum Vergleich wird nachfolgend der arithmetische Mittelwert berechnet:

$$\frac{6 \cdot 1{,}012 + 3 \cdot 1{,}009 + 1{,}015}{10} - 1 = 0{,}0124$$

Dieser beträgt 1,24 % und ist somit geringfügig größer. □

Zur Kontrolle sollte man überprüfen, ob der berechnete durchschnittliche Zinssatz zwischen dem niedrigsten und dem höchsten Zinssatz liegt. Diese Bedingung muss immer erfüllt sein.

3.4 Theoretische Verzinsung

In diesem Abschnitt wird erstmals die Situation betrachtet, dass Einzahlung oder Auszahlung nicht mit dem Beginn einer Zinsperiode zusammenfallen. Ist nichts anderes angegeben, so beginnt die Zinsperiode mit dem Jahreswechsel am 1. Jänner. Für die Berechnung des Endwerts werden nun, wie auf Seite 2 beschrieben, die Zinstage zwischen Einzahlung aus Auszahlung ermittelt. Die Formel für den Barwert lautet folgendermaßen:

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^{\frac{T}{360}}$$

Beispiel: *Am 7. Mai 2015 (Donnerstag, kein Feiertag) wurden 3200 € als Barwert eingezahlt, wobei der Zinssatz konstant 1,2 % p. a. beträgt. Es soll ermittelt werden, welcher Endwert am 23. März 2020 (Montag, kein Feiertag) verfügbar ist.*

Im Jahr 2015 sind es 233 Tage (sieben volle Monate und 23 Tage im Mai). Im Jahr 2020 sind es 82 Tage (zwei volle Monate und 22 Tage im März). Dazwischen liegen vier volle Jahre (2016, 2017, 2018, 2019), also 1440 Tage. Die gesamte Verzinsungsdauer beträgt somit 1755 Tage.

Zur Berechnung des Endwerts wird in die oben genannte Formel eingesetzt:

$$K_n = 3200 \cdot 1{,}012^{\frac{1755}{360}} \approx 3391{,}60\,€$$

Am 23. März 2020 konnten somit 3391,60 € abgehoben werden. □

3.5 Gemischte Verzinsung

Die im vorigen Kapitel beschriebene theoretische Verzinsung ist zur heutigen Zeit relativ einfach zu berechnen. Dennoch wird beispielsweise bei Sparbüchern in der Praxis eine andere Berechnungsmethode verwendet. Dies hat historische Gründe. Potenzen mit rationalen Exponenten können zwar mit dem Taschenrechner problemlos berechnet werden. Früher war dies jedoch eine große Herausforderung. Daher beschränkte man sich auf das Berechnen von Potenzen mit ganzzahligen Exponenten. Heute wird diese Methode als gemischte Verzinsung bezeichnet.

Konkret werden die nicht vollendeten Jahre am Beginn und am Ende des Verzinsungszeitraumes linear verzinst (also mit einfacher Verzinsung). Die vollen Jahre dazwischen werden mit der Zinseszinsformel behandelt. Durch die Mischung beider Varianten entstand auch der Name dieser Verzinsungsmethode. Die Formel für den Endwert sieht folgendermaßen aus:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \tfrac{t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \tfrac{t_2}{360}\right)$$

Dabei sind t_1 und t_2 die Zinstage am Beginn und am Ende des Verzinsungszeitraumes und n ist die Anzahl der vollen Jahre dazwischen.

Beispiel: *Es soll mithilfe der gemischten Verzinsung erneut der Endwert für die Daten des Beispiels zur theoretischen Verzinsung berechnet werden.*

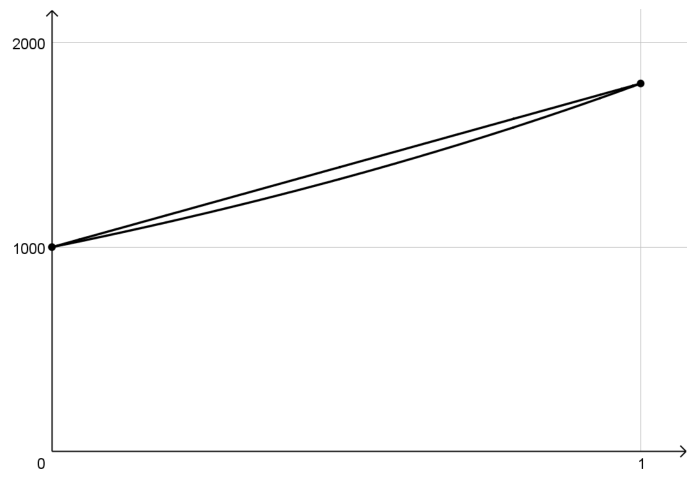
Aus dem obigen Beispiel sind die Werte $t_1 = 233$ Tage, $t_2 = 82$ Tage und $n = 4$ Jahre bereits bekannt. Somit kann in die Endwertformel der gemischten Verzinsung eingesetzt werden:

$$K_n = 3200 \cdot \left(1 + 0{,}012 \cdot \tfrac{233}{360}\right) \cdot 1{,}012^4 \cdot \left(1 + 0{,}012 \cdot \tfrac{82}{360}\right) \approx 3391{,}70\,€$$

Bei dieser Berechnungsmethode beträgt der Endwert 3391,70 €. □

Man erkennt, dass die Ergebnisse bei theoretischer Verzinsung und bei gemischter Verzinsung geringfügig voneinander abweichen. Für die meisten Zwecke ist dieser Unterschied jedoch nicht von Bedeutung, weshalb oft auf die einfachere theoretische Verzinsung zurückgegriffen wird.

Tatsächlich ist es immer so, dass bei der gemischten Verzinsung ein höherer Wert resultiert. Bei Sparbüchern kann man es somit als Vorteil betrachten, dass Banken noch immer diese historische Methode verwenden (bei Krediten ist es hingegen ein Nachteil). Man kann diese Tatsache anhand folgender Abbildung erklären:



Hier wird ein Kapital von 1000 € ein Jahr lang mit 80 % p. a. verzinst. Der obere Graph entspricht der einfachen Verzinsung (lineares Wachstum). Der untere Graph entspricht dem Zinseszinsmodell (exponentielles Wachstum). Für Zeiträume, die kürzer als ein Jahr sind, hat der lineare Verlauf immer den größeren Wert. Da bei der gemischten Verzinsung die beiden unvollständigen Jahre linear verzinst werden, resultiert somit ein größerer Wert als bei der theoretischen Verzinsung.

4 Unterjährige Zinseszinsen

Im vorherigen Kapitel betrug die Zinsperiode immer ein Jahr, d. h. es wurde einmal pro Jahr verzinst. Bei der unterjährigen Verzinsung wird das Kapital m-mal pro Jahr verzinst, wobei diese m Zeitpunkte gleichmäßig über das Jahr verteilt sind. Typische Zinsperioden sind nachfolgend aufgelistet:

Zinsperiode	Zinssatz	Abkürzung
Semester (Halbjahr)	i_2	p. s.
Quartal (Vierteljahr)	i_4	p. q.
Monat	i_{12}	p. m.

Allgemein verwendet man bei m Zinsperioden pro Jahr für den zugehörigen unterjährigen Zinssatz die Bezeichnung i_m.

4.1 Effektiver und nomineller Jahreszinssatz

Der effektive Jahreszinssatz i ist jener Zinssatz, bei welchem bei jährlicher Verzinsung dasselbe Ergebnis resultieren würde, wie bei unterjähriger Verzinsung mit dem unterjährigen Zinssatz i_m. Es muss daher folgende Gleichung erfüllt sein:

$$1 + i = (1 + i_m)^m$$

Durch Umformen erhält man je nach gesuchter Größe folgende Formeln:

$$i = (1 + i_m)^m - 1 \qquad \text{und} \qquad i_m = \sqrt[m]{1 + i} - 1$$

Beispiel: *Der effektive Jahreszinssatz einer quartalsmäßigen Verzinsung beträgt 3 %. Es soll der zugehörige unterjährige Zinssatz i_4 berechnet werden.*

Durch Einsetzen in die obige Formel erhält man $i_4 = \sqrt[4]{1{,}03} - 1 \approx 0{,}00741$. Somit beträgt der Quartalszinssatz ungefähr 0,741 %. □

In der Praxis wird auch häufig der sogenannte nominelle Jahreszinssatz i_{nom} verwendet. Hier gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$i_{\text{nom}} = m \cdot i_m \qquad \text{und} \qquad i_m = \frac{i_{\text{nom}}}{m}$$

Beispiel: *Ein Kapital wird monatlich verzinst, wobei der nominelle Jahreszinssatz 4,2 % beträgt. Es soll der zugehörige Monatszinssatz ermittelt werden.*

Gemäß der obigen Formel erhält man als Monatszinssatz $i_{12} = \frac{4{,}2\,\%}{12} = 0{,}35\,\%$. □

4.2 Endwert berechnen

Für den Endwert eines unterjährig verzinsten Kapitals gilt eine ähnliche Formel wie bei den ganzjährigen Zinseszinsen (siehe Seite 3):

$$K_n = K_0 \cdot (i + i_m)^{m \cdot n}$$

Hier ist K_n das Kapital nach n Jahren (der Endwert), K_0 der Barwert, m die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr, n die Verzinsungsdauer (in Jahren) und i_m der unterjährige Zinssatz.

Beispiel: *Ein Kapital von 50 000 € soll 10 Jahre lang bei einem nominellen Jahreszinssatz von 2 % und quartalsmäßiger Verzinsung angelegt werden. Es soll der Endwert berechnet werden. Es soll außerdem der effektive Jahreszinssatz ermittelt werden.*

Zunächst wird der Monatszinssatz ermittelt. Dieser beträgt $\frac{2\,\%}{4} = 0{,}5\,\%$. Durch Einsetzen in die obige Formel erhält man:

$$K_{10} = 50\,000 \cdot (1 + 0{,}005)^{4 \cdot 10} \approx 61\,039{,}71\,€$$

Der Endwert beträgt somit ca. 61 039,71 €. Wegen $(1 + 0{,}005)^4 \approx 1{,}02015$ beträgt der effektive Jahreszinssatz ca. 2,015 %. □

4.3 Äquivalente Zinssätze

In diesem Kapitel geht es darum, einen unterjährigen Zinssatz i_{m_1}, dessen Anzahl an jährlichen Zinsperioden m_1 beträgt in einen unterjährigen Zinssatz i_{m_2} umzurechnen, dessen Anzahl an jährlichen Zinsperioden m_2 ist. Beide Verzinsungen sollen denselben Endwert liefern.

Herleitung: Da beide Endwerte gleich sein sollen, kann man als Ansatz aufbauend auf die Endwertformel von Seite 7 die folgende Gleichung verwenden:

$$K_0 \cdot (1 + i_{m_1})^{m_1 \cdot n} = K_0 \cdot (1 + i_{m_2})^{m_2 \cdot n}$$

Durch Kürzen von K_0 und Anwenden der n-ten Wurzel erhält man

$$(1 + i_{m_1})^{m_1} = (1 + i_{m_2})^{m_2}.$$

Eine weitere Umformung ergibt schließlich

$$i_{m_2} = \sqrt[m_2]{(1 + i_{m_1})^{m_1}} - 1.$$

■

Die Formel zur Umrechnung des Zinssatzes i_{m_1} in den äquivalenten Zinssatz i_{m_2} lautet daher folgendermaßen:

$$i_{m_2} = \sqrt[m_2]{(1 + i_{m_1})^{m_1}} - 1$$

Beispiel: *Es soll der Semesterzinssatz $i_2 = 1{,}6\,\%$ in den äquivalenten Monatszinssatz i_{12} umgerechnet werden.*

Hierfür wird in die obige Formel $m_1 = 2$ und $m_2 = 12$ eingesetzt:

$$i_{12} = \sqrt[12]{(1+0{,}016)^2} - 1 \approx 0{,}00265$$

Der zu $i_2 = 1{,}6\,\%$ äquivalente Monatszinssatz i_{12} beträgt also ca 0,265 %. □

4.4 Stetige Verzinsung

Die stetige Verzinsung stellt einen Spezialfall der unterjährigen Verzinsung dar. Hier stellt man sich vor, dass die Anzahl an jährlichen Verzinsungen gegen unendlich geht, also $m \to \infty$. Es wird anschließend unter Verwendung der Formel für die unterjährige Verzinsung eine Formel für die stetige Verzinsung hergeleitet:

Herleitung: Als Ansatz wird die Endwertformel in folgender Form verwendet:

$$K_n = K_0 \cdot \left(\left(1 + \tfrac{i_{\text{nom}}}{m}\right)^m\right)^n$$

Da der Ausdruck $\left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{\infty}\right)^\infty$ wenig Sinn ergibt, benötigt man einen mathematischen Satz, der zwar schwierig zu beweisen ist, jedoch durch Einsetzen großer Zahlen in den Taschenrechner glaubwürdig erscheint: Für beliebige reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt für $n \to \infty$ der Zusammenhang:

$$\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \to e^x$$

Dies hat dieselbe Struktur wie der Ausdruck $\left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{m}\right)^m$ im obigen Ansatz. Man erhält somit folgende Formel:

$$K_n = K_0 \cdot \left(e^{i_{\text{nom}}}\right)^n = K_0 \cdot e^{i_{\text{nom}} \cdot n}$$

■

Die Formel für die Berechnung des Endwerts bei stetiger Verzinsung mit nominellem Zinssatz i_{nom} und einer Dauer von n Jahren lautet:

$$K_n = K_0 \cdot e^{i_{\text{nom}} \cdot n}$$

Der große Vorteil dieser Methode ist die äußerst einfache Anwendbarkeit der Formel (auch später in Hinblick auf die Differential- und Integralrechnung). Auch wenn sie nicht exakt mit der realen Verzinsung übereinstimmt, wird sie daher oftmals als Modell in mathematischen Optimierungsprozessen verwendet. Durch seine Verwendung bei der stetigen Verzinsung erhält der sonst eher unnötig erscheinende nominelle Zinssatz ebenfalls eine gewisse Bedeutung.

Häufig wird für den Ausdruck $e^{i_{\text{nom}}}$ auch die Bezeichnung i_∞ verwendet und vom sogenannten stetigen Zinssatz gesprochen. Die Formel für den Endwert lautet dann folgendermaßen:

$$K_n = K_0 \cdot i_\infty^n$$

Beispiel: *Ein Kapital von 50 000 € soll 10 Jahre lang bei einem nominellen Jahreszinssatz von 2 % stetig verzinst werden. Wie groß ist der Endwert?*

$$K_{10} = 50\,000 \cdot e^{0{,}02 \cdot 10} \approx 61\,070{,}14\,€$$

Vergleicht man das Ergebnis mit dem Beispiel zur unterjährigen Verzinsung, so erkennt man Abweichungen von ca. 30 €. Dies ist jedoch für die meisten Optimierungs- und Entscheidungsprozesse vertretbar. □

Aufgrund der permanenten Verzinsung ist der Endwert der stetigen Verzinsung im Vergleich zu jedem anderen Zinsmodell unter Verwendung eines äquivalenten Zinssatzes am höchsten.