Wurzelrechnung

Wurzeln werden verwendet, um Potenzen zu neutralisieren. Kennt man eine bestimmte Potenz einer Zahl, so kann man die Basis der Potenz durch das Anwenden der passenden Wurzel berechnen.

Häufig kommen Wurzeln in der Geometrie, in verschiedenen Bereichen der Physik sowie in der Finanzmathematik zum Einsatz.

Beispiel: *Eine würfelförmige Box hat ein Volumen von 42,875 L. Es soll berechnet werden, wie groß die Seitenlänge a dieser Box ist.*

Aus der Volumenformel des Würfels erhält man folgende Gleichung:

$$a^3 = 42{,}875\,\mathrm{L} = 42{,}875\,\mathrm{dm}^3 = 42\,875\,\mathrm{cm}^3$$

Indem man nun auf beiden Seiten die dritte Wurzel zieht, erhält man folgendes Resultat:

$$a = \sqrt[3]{42\,875\,\mathrm{cm}^3} = 35\,\mathrm{cm}$$

Die würfelförmige Box hat somit eine Seitenlänge von 35 cm. □

1 Potenzschreibweise

Diese Neutralisierung funktioniert deshalb, weil eine Wurzel eigentlich nur eine andere Schreibweise für den Nenner einer Potenz ist. Für $\sqrt[3]{x^3}$ gilt beispielsweise Folgendes:

$$\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x.$$

Allgemein gilt für alle ganzen Zahlen m und alle positiven natürlichen Zahlen n, dass die folgenden Schreibweisen äquivalent sind:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Man kann daher beliebig zwischen Potenz- und Wurzelschreibweise wechseln. Den Nenner n bezeichnet man hier als Wurzelexponent. Den Term x unter der Wurzel nennt man Radikand. Nachfolgend werden einige Begriffe erläutert:

- Ist der Wurzelexponent 2, so handelt es sich um die Quadratwurzel. Da diese die mit Abstand häufigste Wurzel ist, wird hierfür meist eine verkürzte Schreibweise verwendet: Die Terme $\sqrt[2]{x}$ und $\sqrt{x}$ sind gleichwertig.
- Ist der Wurzelexponent 3, so spricht man von der Kubikwurzel.
- Allgemein bezeichnet man $\sqrt[n]{x}$ als n-te Wurzel von x.

2 Rechenregeln für Wurzeln

Die nachfolgend erläuterten Rechenregeln für Wurzeln (also für Potenzen mit rationalen Exponenten) bauen auf den Rechenregeln für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten auf. Sollten diese nicht mehr ausreichend bekannt sein, so ist es sinnvoll, diese vorher zu wiederholen. Für das Rechnen mit Wurzeln ist meistens die Potenzschreibweise die bessere Wahl.

2.1 Multiplikation von Wurzeln

Gegeben sind die Wurzeln $\sqrt[n]{x^m}$ und $\sqrt[v]{x^w}$. Um das Produkt dieser Wurzeln zu berechnen, schreibt man sie zuerst in Potenzschreibweise und verwendet die bekannten Potenzrechenregeln:

$$\sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[v]{x^w} = x^{\frac{m}{n}} \cdot x^{\frac{w}{v}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{w}{v}}$$

Anschließend muss noch der Exponent auf gemeinsamen Nenner gebracht, addiert und anschließend vollständig gekürzt werden. Zuletzt wird die Potenz wieder in Wurzelschreibweise dargestellt.

Beispiel: *Es soll der folgende Ausdruck so weit wie möglich vereinfacht werden.*

$$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{12}+\frac{9}{12}} = x^{\frac{17}{12}} = \sqrt[12]{x^{17}}$$

□

2.2 Division von Wurzeln

Bei der Division von Wurzeln geht man genau so wie bei der Multiplikation vor. Der einzige Unterschied ist, dass hier gemäß der Potenzrechenregeln der Exponent des Nenners subtrahiert wird.

Beispiel: *Es soll der folgende Ausdruck so weit wie möglich vereinfacht werden.*

$$\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{9}{12}-\frac{8}{12}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$$

□

2.3 Potenzen von Wurzeln

Auch bei Potenzen von Wurzeln wird auf die Potenzrechenregeln zurückgegriffen. Zunächst wird die Wurzel als Potenz dargestellt. Anschließend werden die Exponenten multipliziert und das Ergebnis – falls möglich – gekürzt. Zuletzt wird die Potenz wieder als Wurzel geschrieben.

Beispiel: *Es soll der folgende Ausdruck so weit wie möglich vereinfacht werden.*

$$\left(\sqrt[4]{x^3}\right)^6 = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^6 = x^{\frac{3}{4}\cdot 6} = x^{\frac{18}{4}} = x^{\frac{9}{2}} = \sqrt{x^9}$$

□

2.4 Verschachtelte Wurzeln

Darunter versteht man einen Term, bei welchem sich unter einer Wurzel zumindest eine weitere Wurzel befindet. Ziel ist es, den Term mit nur einer Wurzel und ohne rationale Exponenten darzustellen.

Beispiel: *Es soll der folgende Ausdruck so weit wie möglich vereinfacht werden.*

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^6}} = \sqrt[3]{x^{\frac{6}{5}}} = \left(x^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$$

Ein alternativer Lösungsweg ist das Multiplizieren der Wurzelexponenten:

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{x^6}} = \sqrt[15]{x^6} = x^{\frac{6}{15}} = x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}$$

Diese Methode funktioniert jedoch nur, wenn die Wurzeln direkt aufeinander folgen. □

Falls zwischen den Wurzeln kein weiterer Term steht (wie im Beispiel oben), ist der Aufwand relativ gering. Man könnte hier auch einfach die Wurzelexponenten multiplizieren und anschließend kürzen. Etwas komplizierter ist es, wenn zwischen den Wurzeln ein weiterer Term steht:

Beispiel: *Es soll der folgende Ausdruck so weit wie möglich vereinfacht werden.*

$$\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt[5]{x^6}} = \sqrt[3]{x^2 \cdot x^{\frac{6}{5}}} = \left(x^{2+\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{16}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{16}{15}} = \sqrt[15]{x^{16}}$$

□

2.5 Faktoren unter Wurzel bringen

Hier geht es darum, Faktoren die ursprünglich außerhalb der Wurzel stehen, unter diese zu bringen. Da der Exponent des außenstehenden Terms zuvor den Nenner 1 hatte und nachher als Nenner den Wurzelexponenten haben muss, wird er mit diesem erweitert. Letztendlich bedeutet dies, dass alle außenstehenden Exponenten mit dem Wurzelexponent multipliziert werden.

Beispiel: *Es sollen beim nachfolgenden Ausdruck alle Faktoren unter die Wurzel gebracht werden.*

$$x^3yz^2 \cdot \sqrt[3]{xyz^2} = x^{\frac{9}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{xyz^2} = \sqrt[3]{x^9y^3z^6 \cdot xyz^2} = \sqrt[3]{x^{10}y^4z^8}$$

□

2.6 Teilweise Wurzelziehen

Dieser Abschnitt behandelt genau das umgekehrte Problem wie der vorherige Abschnitt: Man möchte möglichst viele Faktoren, die ursprünglich unter der Wurzel stehen, vor die Wurzel schreiben. Dies funktioniert am einfachsten, indem man die Exponenten der Faktoren unter der Wurzel mit Rest durch den Wurzelexponenten dividiert. Der Ganzzahlquotient ist dann der Exponent außerhalb der Wurzel und der Divisionsrest verbleibt unter der Wurzel. Stehen Zahlen unter der Wurzel, ist es sinnvoll, im ersten Schritt deren Primfaktorzerlegung zu bestimmen.

Beispiel: *Es sollen möglichst viele Faktoren des nachfolgenden Ausdrucks vor die Wurzel geschrieben werden.*

$$\sqrt[3]{432\,x^9y^{14}z^4} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^3 \cdot x^9y^{14}z^4} = 2 \cdot 3 \cdot x^3y^4z \cdot \sqrt[3]{2\,y^2z} = 6\,x^3y^4z \cdot \sqrt[3]{2\,y^2z}$$

Im ersten Schritt wurde die Primfaktorzerlegung von 432 ermittelt, welche $2^4 \cdot 3^3$ lautet. □

3 Wurzelgleichungen

Bei einer Wurzelgleichung steht die gesuchte Variable unter einer Wurzel. In diesem Kapitel werden nur Wurzelgleichungen mit Quadratwurzeln behandelt. Grundsätzlich besteht das Lösen von Wurzelgleichungen aus drei Schritten, welche nachfolgend erläutert werden.

– **Definitionsmenge bestimmen:** Da der Radikand einer Quadratwurzel nicht negativ sein darf, muss zu Beginn immer die Definitionsmenge der Gleichung bestimmt werden. Das ist jene Menge, deren Elemente unter keiner der vorkommenden Wurzeln einen negativen Radikanden erzeugen. Man ermittelt die Definitionsmenge D, indem man für jede vorkommende Wurzel die Ungleichung Radikand ≥ 0 löst und anschließend den Mengendurchschnitt bildet.

– **Quadrieren:** Zur Neutralisierung der Wurzeln müssen beide Seiten der Gleichung quadriert werden. Befinden sich auf einer Seite Summen oder Differenzen zweier Wurzeln, so müssen die binomischen Formeln verwendet werden. Es kann auch vorkommen, dass anschließend nochmal quadriert werden muss.

– **Probe durchführen:** Da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung sondern eine sogenannte Gewinnumformung ist, kann es vorkommen, dass die Lösungsmenge nach der Umformung mehr Elemente enthält, als davor. Daher muss am Ende immer die Probe durchgeführt werden, um sicherzustellen, dass die gefunden Lösung nicht erst durch das Quadrieren entstanden ist.

  Ein einfaches Beispiel zur Veranschaulichung: Die Gleichung $x = -1$ hat nur die Lösung -1. Durch Quadrieren erhält man die Gleichung $x^2 = 1$. Diese hat nun zusätzlich zu -1 auch die Lösung 1, obwohl 1 keine Lösung der ursprünglichen Gleichung war.

Beispiel: *Es soll die Gleichung* $4 \cdot \sqrt{x+3} = 3 \cdot \sqrt{x+10}$ *gelöst werden.*

Im ersten Schritt muss die Definitionsmenge bestimmt werden. Dazu wird überprüft, für welche eingesetzten Werte die Radikanden positiv oder null sind:

$$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, +\infty)$$
$$x + 10 \geq 0 \Rightarrow x \geq -10 \Rightarrow x \in [-10, +\infty)$$

Der Durchschnitt dieser beiden Mengen entspricht der Definitionsmenge. Man erhält also $D = [-3, +\infty)$. Durch beidseitiges Quadrieren erhält man folgende Gleichung:

$$16 \cdot (x+3) = 9 \cdot (x+10).$$

Diese lineare Gleichung kann nun durch Umformen gelöst werden:

$$\begin{aligned} 16x + 48 &= 9x + 90 \\ 7x &= 42 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Da 6 ein Element der Definitionsmenge ist, könnte es sich hierbei um eine Lösung der Gleichung handeln. Als Probe wird das Ergebnis auf beiden Seiten eingesetzt, wobei man für die linke und die rechte Seite folgende Werte erhält:

Linke Seite: $4 \cdot \sqrt{6+3} = 4 \cdot 3 = 12$
Rechte Seite: $3 \cdot \sqrt{6+10} = 12$

Da beide Seiten übereinstimmen, ist 6 tatsächlich die Lösung der Wurzelgleichung. □