Trigonometrische Funktionen

In der Geometrie wurden die Winkelfunktionen über das Verhältnis der Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks definiert. Man konnte somit nur die Werte für Winkel zwischen 0° und 90° berechnen. Für größere Winkel bzw. für negative Winkel liefert das rechtwinklige Dreieck keine Aussage. Man benötigt daher ein allgemeineres Konzept, welches in diesem Skriptum erläutert wird.

1 Winkeleinheiten

Die Winkeleinheit Grad wird nur im Zusammenhang mit geometrischen Fragestellungen verwendet. In diesem Kapitel wird im Bogenmaß gearbeitet, also mit der Winkeleinheit Radiant (rad). Diese Einheit ist die Standardwinkeleinheit in der Mathematik, weshalb sie auch nicht explizit angegeben wird. Hat in einer Aufgabenstellung ein Winkel beispielsweise den Wert 1, so ist klar, dass es sich um 1 rad handelt. Wird stattdessen das Gradmaß verwendet, so muss das entsprechende Symbol verwendet werden, also beispielsweise 25°.

1.1 Umrechnung

Der volle Kreis entspricht im Gradmaß einem Winkel von 360° und im Bogenmaß einem Winkel von 2π rad. Daraus ergeben sich folgende Umrechnungsformeln zwischen dem Gradmaß und dem Bogenmaß:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} \approx 0{,}017453\,\mathrm{rad}$$

$$1\,\mathrm{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}296^\circ$$

Herleitung: Die Herleitung ergibt sich unmittelbar durch Gleichsetzen der obigen Werte für den vollen Kreis:

$$360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad}$$

Je nachdem, welche Einheit gesucht ist, wird nun entweder durch 360 oder durch 2π dividiert und anschließend gekürzt. ■

Beispiel: *Es sollen 125° ins Bogenmaß umgerechnet werden.*

Ein Grad entspricht $\frac{\pi}{180}$ rad. Daher muss dieser Wert mit 125 multipliziert werden: $125 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 2{,}182$ rad □

Beispiel: *Es sollen 1,2 rad ins Gradmaß umgerechnet werden.*

Ein Radiant entspricht $\frac{180^\circ}{\pi}$. Daher muss dieser Wert mit 1,2 multipliziert werden: $1{,}2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 68{,}75^\circ$ □

Es sollten keinesfalls die oben genannten gerundeten Umrechnungsfaktoren auswendig gelernt werden. Sinnvoller ist es, sich die Brüche $\frac{\pi}{180}$ und $\frac{180}{\pi}$ zu merken. Weiß man zusätzlich, dass der Zahlenwert im Bogenmaß kleiner ist als im Gradmaß, so ist auch klar, wann die Zahl 180 im Nenner und wann sie im Zähler steht.

1.2 Winkeleinheiten am Taschenrechner

Wenn am Taschenrechner mit Winkelfunktionen oder deren Umkehrfunktionen gerechnet wird, muss zuvor immer auf die eingestellte Winkeleinheit geachtet werden. Arbeitet man im Gradmaß, so muss am Display die Abkürzung `D` oder `DEG` für das englische Wort *degree* aufscheinen. Möchte man im Bogenmaß arbeiten, so muss die Abkürzung `R` oder `RAD` am Display sichtbar sein.

Achtung: Bei vielen Taschenrechnern steht eine dritte Winkeleinheit zur Auswahl, das sogenannte Neugrad. Hier hat der rechte Winkel 100 Einheiten (statt 90 beim gewöhnlichen Gradmaß). Trügerischerweise ist die zugehörige Abkürzung meistens `G`, `GRA` bzw. `GRAD`.

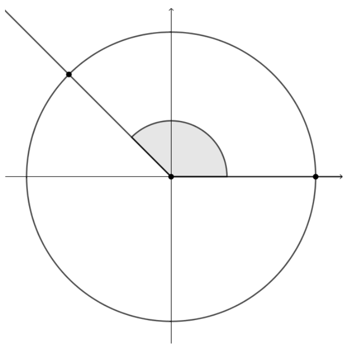
Wie man die Winkeleinheit am Taschenrechner ändern kann, sollte im Handbuch nachgelesen oder im Internet recherchiert werden.

2 Winkelfunktionen im Einheitskreis

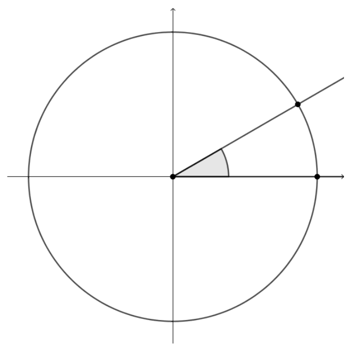
Der Einheitskreis entspricht einem Kreis mit Radius 1, dessen Mittelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Es handelt sich dabei um die Menge aller Punkte $(x \mid y)$, welche die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen. Dies kann man sich relativ einfach mit Hilfe des Satzes von Pythagoras überlegen, da der Radius (und damit die Hypotenuse) für jeden Punkt des Umfangs 1 ist.

2.1 Winkel im Einheitskreis

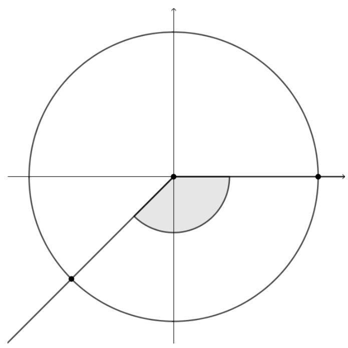
Winkel werden ausgehend von der positiven x-Achse im mathematisch positiven Sinn gemessen (also gegen den Uhrzeigersinn). Der vollständige Kreis entspricht einem Winkel von 2π (bzw. $360°$). Misst man im mathematisch negativen Sinn, so entstehen negative Winkel (siehe rechte Abbildung). Winkel, die größer als 2π sind, haben mehr als eine volle Umdrehung zurückgelegt (siehe mittlere Abbildung). Auf diese Weise können kann jede beliebige reelle Zahl als Winkel im Einheitskreis dargestellt werden.



$\frac{3\pi}{4}$ (bzw. $135°$)



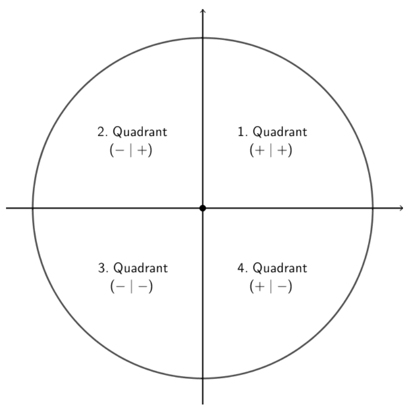
$\frac{13\pi}{6}$ (bzw. $390°$)



$-\frac{3\pi}{4}$ (bzw. $-135°$)

2.2 Quadranten

An dieser Stelle sollte wiederholt werden, dass das Koordinatensystem in vier Bereiche, die sogenannten Quadranten, unterteilt wird. Diese werden in der nachfolgenden Abbildung mit römischen Ziffern beschriftet.



2.3 Definition der Winkelfunktionen

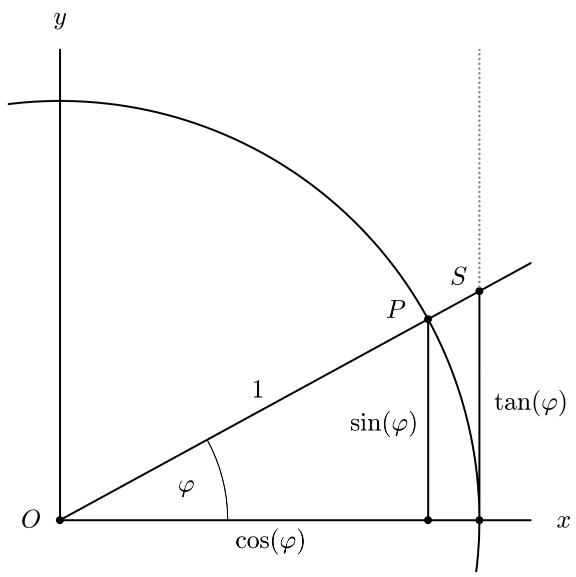
Sei nun ein beliebiger Winkel φ gegeben, dessen Strahl den Einheitskreis im Punkt $P(x_P \mid y_P)$ schneidet. Dann werden die drei Winkelfunktionen folgendermaßen definiert:

$\sin(\varphi) = y_P$ (y-Wert von Punkt P)

$\cos(\varphi) = x_P$ (x-Wert von Punkt P)

$\tan(\varphi) = y_S$ (y-Wert von Punkt S)

Den Punkt S erhält man, indem man den Strahl des Winkels mit der Gerade $x = 1$ schneidet. Nachfolgende Abbildung veranschaulicht diese Definitionen.



Es muss noch überprüft werden, ob diese neue und allgemeinere Definition der Winkelfunktionen überhaupt mit jener im rechtwinkligen Dreieck übereinstimmt.

Herleitung: Um die oben beschriebenen Zusammenhänge zu überprüfen, betrachtet man zunächst das kleinere der beiden rechtwinkligen Dreiecke in der obigen Skizze. Da die Hypotenuse dieses Dreiecks 1 ist (der Radius des Einheitskreises), gelten gemäß der Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck folgende Zusammenhänge:

$$\sin(\varphi) = \frac{y_P}{1} = y_P \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = \frac{x_P}{1} = x_P.$$

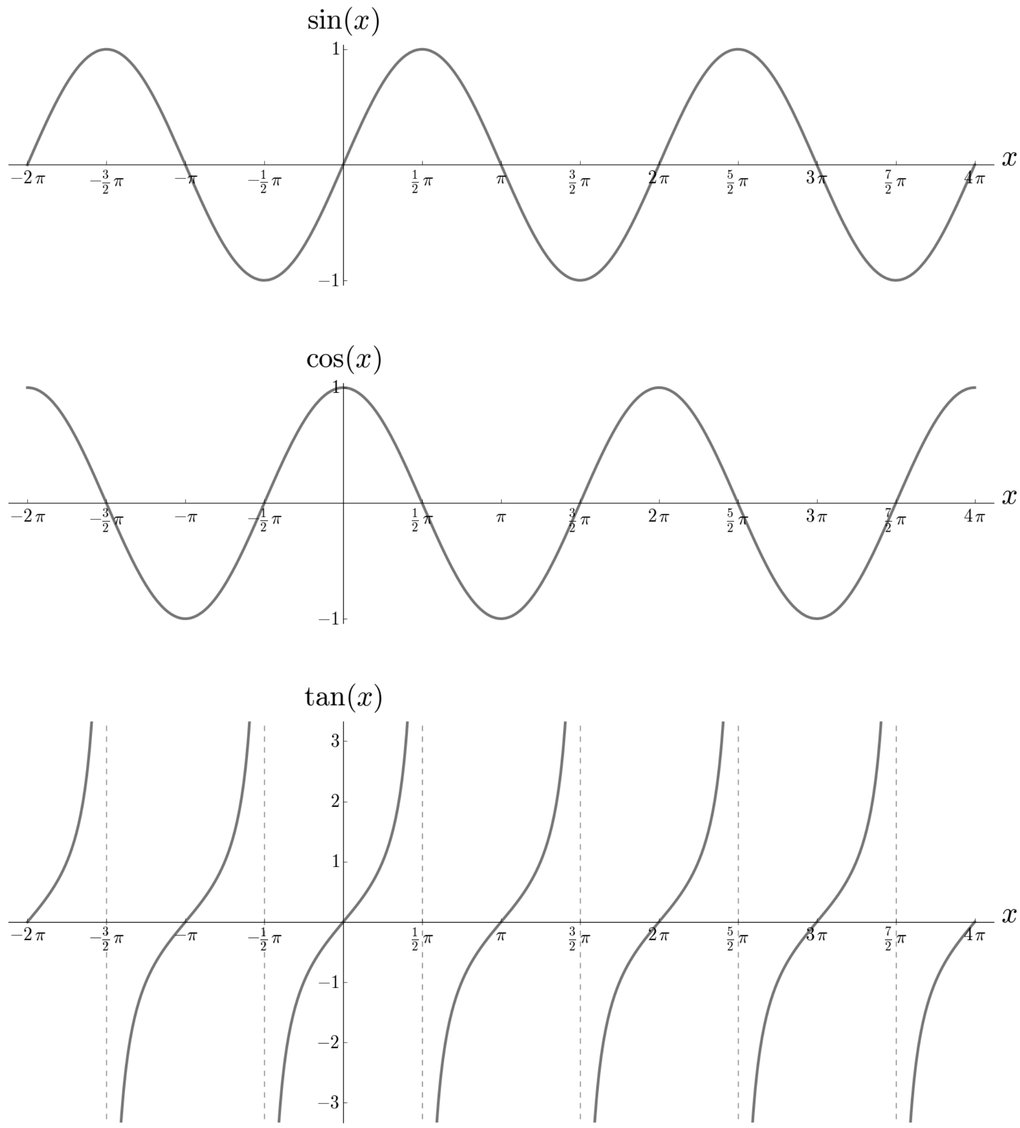
Für den Tangens verwendet man das größere rechtwinklige Dreieck. Hier hat die Ankathete von φ den Wert 1. Daher gilt folgender Zusammenhang:

$$\tan(\varphi) = \frac{y_S}{1} = y_S$$

Es wurde somit nachgewiesen, dass die Definitionen im rechtwinkligen Dreieck mit den neuen Definitionen im Einheitskreis verträglich sind und es zu keinen Widersprüchen kommt. ■

3 Funktionsgraphen

Misst man die Werte der drei Winkelfunktionen für beliebige Winkel x, so kann man diese als Funktionsgraph im Koordinatensystem darstellen. Im Intervall $[-2\pi, 4\pi]$ sehen die Funktionsgraphen folgendermaßen aus:



4 Wichtige Eigenschaften

In diesem Kapitel werden einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen behandelt, welche u. a. später beim Lösen von trigonometrischen Gleichungen notwendig sind.

4.1 Zusammenhang zwischen Sinus, Kosinus und Tangens

Zwischen den drei Winkelfunktionen besteht folgender Zusammenhang:

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$

Herleitung: Da die beiden rechtwinkligen Dreiecke in der Abbildung von Seite 3 ähnlich sind (denn sie stimmen in allen Winkeln überein), stehen die Katheten im selben Verhältnis zueinander. Somit gilt folgender Zusammenhang:

$$\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\tan(\varphi)}{1} = \tan(\varphi).$$

■

4.2 Wertebereich

Der Wertebereich des Sinus und des Kosinus beträgt jeweils $[-1, 1]$. Das bedeutet, es gibt keinen Winkel, dessen Sinus- bzw. Kosinuswert nicht in diesem Intervall liegt. Der Wertebereich des Tangens entspricht der Menge der reellen Zahlen.

Einige wichtige Werte, kann man sich gut mit folgender Tabelle merken:

Winkel x		$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
0	$0\,°$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0
$\frac{\pi}{6}$	$30\,°$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$45\,°$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$60\,°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90\,°$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	undefiniert

4.3 Periodizität

Wie man leicht anhand der obigen Graphen erkennen kann, sind die drei Winkelfunktionen periodisch, d. h. ihre Werte wiederholen sich in bestimmten Abständen. Beim Sinus und beim Kosinus beträgt die Periodenlänge 2π, beim Tangens nur π. Es gelten daher für beliebige reelle Zahlen x folgende Eigenschaften:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$\tan(x + \pi) = \tan(x)$$

4.4 Vorzeichen

Durch Überprüfen verschiedener Winkel am Einheitskreis bzw. durch Betrachten der Funktionsgraphen erhält man in den vier Quadranten folgende Vorzeichen:

	I	II	III	IV
Sinus	$+$	$+$	$-$	$-$
Kosinus	$+$	$-$	$-$	$+$
Tangens	$+$	$-$	$+$	$-$

4.5 Symmetrie

Sinus und Tangens sind offensichtlich ungerade Funktionen. Das bedeutet, dass sie sich im negativen Bereich genau umgekehrt verhalten, wie im positiven Bereich. Der Kosinus ist hingegen eine gerade Funktion. Dies bedeutet, dass er sich in beide Richtungen gleich verhält (also um die y-Achse gespiegelt ist). Insgesamt gelten daher folgende Eigenschaften:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\tan(-x) = -\tan(x)$

4.6 Verschiebungen

Durch Betrachtung der Funktionsgraphen erkennt man, dass der Sinus im Vergleich zum Kosinus um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben ist. Unter Verwendung der Regeln zum Verschieben von Funktionsgraphen kann man daher folgenden Zusammenhang aufstellen:

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Umgekehrt entspricht der Kosinus dem um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobenen Sinus, weshalb ebenso die folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Geht man am Graphen der Sinus- bzw. der Kosinusfunktion um π nach rechts (oder links), so entspricht der Funktionswert an der neuen Stelle genau dem mit -1 multiplizierten Funktionswert der ursprünglichen Stelle. Daher gelten die folgenden zwei Eigenschaften:

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

4.7 Nullstellen und Polstellen

Beim Sinus kann man leicht anhand des Graphen bzw. mit Hilfe des Einheitskreises feststellen, dass sich die Nullstellen immer bei ganzzahligen Vielfachen von π befinden. Allgemein gilt daher für beliebige ganze Zahlen n folgende Eigenschaft:

$$\sin(n\pi) = 0$$

Da der Kosinus laut vorherigem Abschnitt um genau $\frac{\pi}{2}$ gegenüber dem Sinus verschoben ist, müssen auch die Nullstellen verschoben sein. Es gilt daher für beliebige ganze Zahlen n folgende Eigenschaft:

$$\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Da der Tangens als Quotient von Sinus und Kosinus definiert ist, muss er ebenso wie der Sinus seine Nullstellen bei den ganzzahligen Vielfachen von π haben:

$$\tan(n\pi) = 0$$

Dort, wo der Kosinus seine Nullstellen hat, befinden sich die Polstellen des Tangens, da man an dieser Stelle durch Null dividieren würde.

4.8 Trigonometrischer Pythagoras

Als trigonometrischer Pythagoras wird häufig die folgende, für beliebige reelle Zahlen gültige, Eigenschaft bezeichnet:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

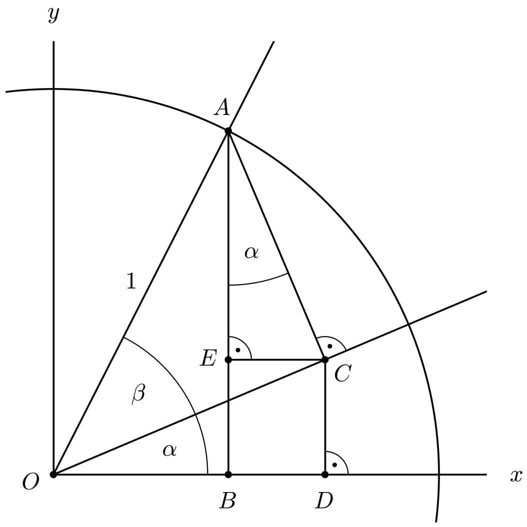
Herleitung: Die Herleitung erfolgt anhand des Satzes von Pythagoras. Dazu betrachte man die Skizze auf Seite 3. Wenn $\sin(x)$ und $\cos(x)$ die beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks sind, dann ist der Radius des Einheitskreises (dessen Länge 1 beträgt) die Hypotenuse. Durch Einsetzen in den Satz von Pythagoras erhält man die gesuchte Eigenschaft. ■

4.9 Additionstheoreme (und Folgerungen)

Häufig steht im Argument des Sinus oder des Kosinus eine Summe. Um solche Ausdrücke vereinfachen zu können, werden die sogenannten Additionstheoreme benötigt:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cdot\cos(y)+\cos(x)\cdot\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cdot\cos(y)-\sin(x)\cdot\sin(y) \end{aligned}$$

Für deren Herleitung wird folgende Skizze des Einheitskreises benötigt:



Herleitung: Zunächst ein paar allgemeine Eigenschaften, die für beiden Additionstheoreme benötigt werden: Es gilt $\overline{EB}=\overline{CD}$ und $\overline{EC}=\overline{BD}$. Außerdem erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle OCA$, dessen Hypotenuse 1 ist, die Eigenschaften $\sin(\beta)=\overline{AC}$ und $\cos(\beta)=\overline{OC}$. Da die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle OBA$ ebenfalls 1 ist, erhält man außerdem $\sin(\alpha+\beta)=\overline{AB}$ und $\cos(\alpha+\beta)=\overline{OB}$.

– Zuerst wird das Additionstheorem des Sinus hergeleitet. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ODC$ erhält man

$$\sin(\alpha)=\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{CD}}{\cos(\beta)}\Rightarrow\sin(\alpha)\cos(\beta)=\overline{CD}=\overline{EB}.$$

  Aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ECA$ folgt

$$\cos(\alpha)=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AE}}{\sin(\beta)}\Rightarrow\cos(\alpha)\sin(\beta)=\overline{AE}.$$

  Abschließend erhält man

$$\sin(\alpha+\beta)=\overline{AB}=\overline{EB}+\overline{AE}=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta).$$

– Beim Additionstheorem des Kosinus geht man ähnlich vor. Aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ODC$ erhält man

$$\cos(\alpha)=\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OD}}{\cos(\beta)}\Rightarrow\cos(\alpha)\cos(\beta)=\overline{OD}.$$

  Aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ECA$ folgt

$$\sin(\alpha)=\frac{\overline{EC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EC}}{\sin(\beta)}\Rightarrow\sin(\alpha)\sin(\beta)=\overline{EC}=\overline{BD}.$$

  Abschließend erhält man

$$\cos(\alpha+\beta)=\overline{OB}=\overline{OD}-\overline{BD}=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta).$$

■

Aus diesen beiden Formeln kann man folgende ebenfalls nützliche Eigenschaften erhalten:

$$\begin{aligned}
\sin(x-y) &= \sin(x)\cdot\cos(y)-\cos(x)\cdot\sin(y)\\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cdot\cos(y)+\sin(x)\cdot\sin(y)\\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cdot\cos(x)\\
\cos(2x) &= \cos^2(x)-\sin^2(x)
\end{aligned}$$

5 Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen werden benötigt, wenn beispielsweise der Wert des Sinus bekannt ist und der zugehörige Winkel bestimmt werden soll. Man bezeichnet die Umkehrfunktionen auch als Arkusfunktionen, was sich vom lateinischen Wort *arcus* ableitet und Bogen bedeutet. Dies bezieht sich auf die Bogenlänge am Einheitskreis, die ja im Bogenmaß (Radiant) mit dem Winkel übereinstimmt.

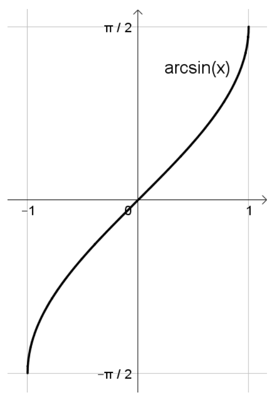
Abgekürzt werden die Arkusfunktionen, indem man vor die entsprechende Winkelfunktion `arc` schreibt, also beispielsweise `arcsin` für Arkussinus. Bei Taschenrechnern werden auch häufig die Abkürzungen $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$ verwendet. In vielen Computerprogrammen und Programmiersprachen sind auch die Kurzformen `asin`, `acos` und `atan` gebräuchlich.

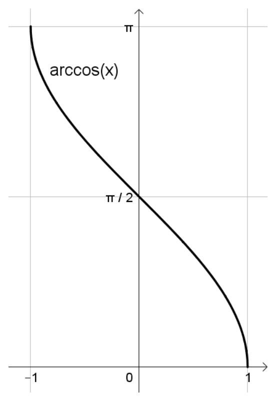
Da die Winkelfunktionen periodisch sind, gibt es grundsätzlich unendlich viele Winkel, die beispielsweise einem Sinuswert zugeordnet werden können. Der Taschenrechner liefert stets nur Werte aus einem einzigen Monotonieintervall der entsprechenden Winkelfunktion. Die meisten Geräte und Programme verwenden hierfür folgende Intervalle:

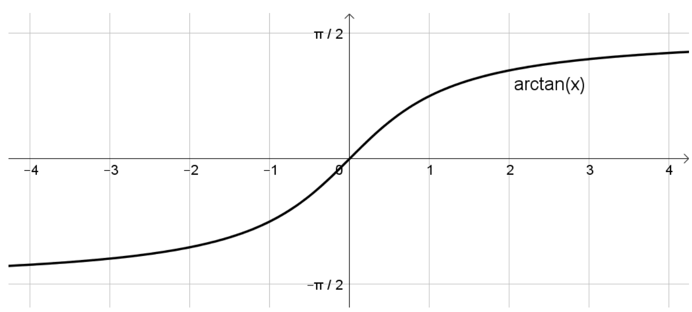
$$\arcsin(x)\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \qquad \arccos(x)\in[0,\pi] \qquad \arctan(x)\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}]$$

Alle weiteren Lösungen muss man sich selbstständig anhand der Eigenschaften der Winkelfunktionen erarbeiten.

Die Funktionsgraphen der drei Arkusfunktionen sind nachfolgend abgebildet:

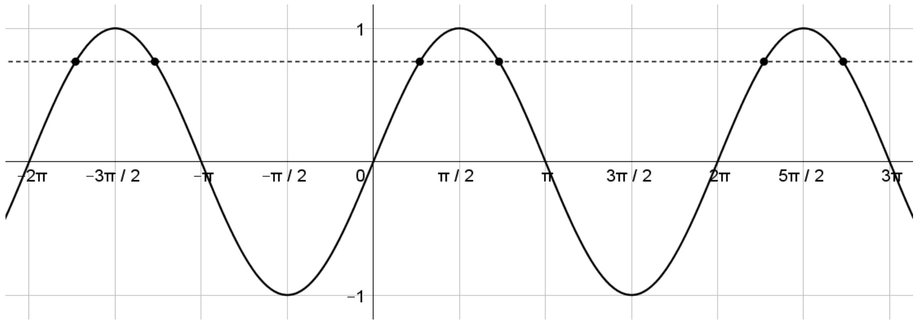






Beispiel: *Es sollen alle Winkel x bestimmt werden, für die $\sin(x) = 0{,}75$ gilt.*

Der Taschenrechner liefert hierfür das Ergebnis $\arcsin(0{,}75) \approx 0{,}848$. Das ist im folgenden Graphen der erste Punkt rechts der y-Achse. Betrachtet man den Graphen, so erkennt man die Position der weiteren Lösungen.



Eine weitere Lösung muss sich bei $\pi - 0{,}848 \approx 2{,}294$ befinden. Alle anderen Lösungen erhält man durch Verwendung der Periodizität der Sinusfunktion. Die vollständige Menge an Lösungen kann durch die folgenden beiden Ausdrücke beschrieben werden, wobei n eine beliebige ganze Zahl darstellt:

$$0{,}848 + 2\pi n \qquad \text{und} \qquad 2{,}294 + 2\pi n$$

□

6 Trigonometrische Gleichungen

Bei einer trigonometrischen Gleichung kommt die gesuchte Variable im Argument einer Winkelfunktion vor. Gelegentlich werden solche Gleichungen auch als goniometrische Gleichungen bezeichnet. Da die Winkelfunktionen periodisch sind, haben trigonometrische Gleichungen häufig unendlich viele Lösungen, weshalb bei einigen Aufgabenstellungen ein Lösungsintervall vorgegeben wird, in welchem die Lösung liegen soll. Bei anderen Aufgabenstellungen soll ein allgemeiner Lösungsausdruck ermittelt werden, der alle Lösungen umfasst.

Das Lösen von trigonometrischen Gleichungen kann sehr schwierig sein bzw. ist häufig analytisch überhaupt nicht möglich. Oft sind die in Kapitel 4 beschriebenen Eigenschaften für die Lösung erforderlich.

Beispiel: *Es sollen alle Lösungen der Gleichung $\sin(3x-2) + \frac{3}{2} = 2$ bestimmt werden.*

Im ersten Schritt werden folgende Umformungen durchgeführt:

$$\begin{aligned} \sin(3x-2) + \tfrac{3}{2} &= 2 \\ \sin(3x-2) &= \tfrac{1}{2} \\ 3x - 2 &= \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Da $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ die Lösungen $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ und $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ besitzt, müssen von hier an zwei Gleichungen gelöst werden, nämlich

$$3x - 2 = \tfrac{\pi}{6} + 2\pi n \qquad \text{und} \qquad 3x - 2 = \tfrac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

Durch Umformen nach x erhält man die beiden Lösungsausdrücke

$$x = \tfrac{\pi}{18} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2\pi n}{3} \qquad \text{und} \qquad x = \tfrac{5\pi}{18} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2\pi n}{3}.$$

Man kann nun in die linke und in die rechte Formel beliebige ganze Zahlen für n einsetzen und erhält dadurch jeweils eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

□

Beispiel: *Es sollen alle Lösungen der Gleichung* $\sin(2x) = 6\cos(x)$ *bestimmt werden.*

In dieser Gleichung kommen zwei verschiedene trigonometrische Funktionen vor. Eine weitere Schwierigkeit ist die Tatsache, dass die Argumente verschieden sind. Daher wird im ersten Schritt $\sin(2x)$ ersetzt durch $2\sin(x)\cos(x)$. Man kann nun folgende Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned} 2\sin(x)\cos(x) &= 6\cos(x) \\ 2\sin(x)\cos(x) - 6\cos(x) &= 0 \\ \cos(x)\cdot(\sin(x) - 3) &= 0 \end{aligned}$$

Der Satz vom Nullprodukt besagt, dass alle x Lösung der Gleichung sind, für welche $\cos(x) = 0$ oder $\sin(x) = 3$ gilt. Da die zweite Gleichung niemals erfüllt ist, weil der Wertebereich des Sinus $[-1, 1]$ ist, bleibt nur $\cos(x) = 0$ übrig. Die Lösungen dieser Gleichung sind $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Da es keine weiteren Lösungen gibt, hat auch die ursprüngliche Gleichung die Lösungen $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

□

7 Allgemeine Schwingungsfunktion

Bisher wurden die trigonometrischen Funktionen in ihrer Grundform untersucht. Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion können in einer allgemeineren Form auch verwendet werden, um eine Vielzahl von periodischen Vorgängen zu beschreiben:

- Pendel (und andere schwingende Objekte)
- Wechselstrom, Wechselspannung
- Tageslänge im Laufe des Jahres
- Koordinaten eines Objektes, das sich gleichförmig auf einer Kreisbahn bewegt

Die dafür benötigte allgemeine Schwingungsfunktion hat folgende Gestalt:

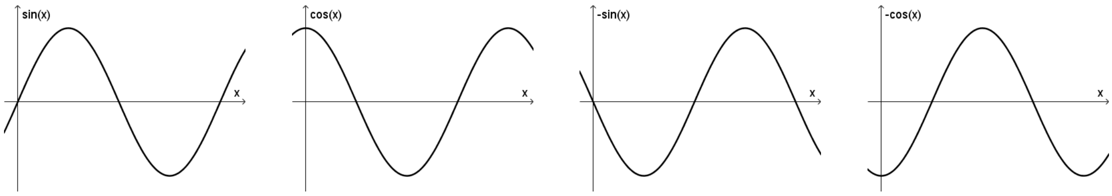
$$f(t) = A \cdot \sin(2\pi\nu \cdot (t - \varphi)) + d$$

Da bei Schwingungsprozessen häufig die Zeit die unabhängige Variable ist, wird meistens t anstelle von x verwendet. Die vorkommenden Parameter haben folgende Bedeutung:

- Die Amplitude A gibt die maximale Entfernung von der Ruhelage an, also jener Position, um welche das betrachtete Objekt schwingt.
- Die Frequenz ν (griechischer Kleinbuchstabe „Ny“) gibt an, wie viele Schwingungen pro Zeiteinheit abgeschlossen sind. Sie ist der Kehrwert der Periodendauer T, also $\nu = \frac{1}{T}$. Häufig wird statt ν auch die Variable f verwendet, was in diesem Fall jedoch aufgrund der gleichnamigen Funktion nicht möglich ist.
- Die Phasenverschiebung φ wird verwendet, um den Funktionsgraphen horizontal zu verschieben. Dies ist notwendig, wenn er sich zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht in Ruhelage befinden soll. Für $\varphi > 0$ handelt es sich um eine Verschiebung nach rechts (da in der Grundformel bereits ein Minus steht).
- Durch den Offset d kann der Funktionsgraph vertikal verschoben werden.

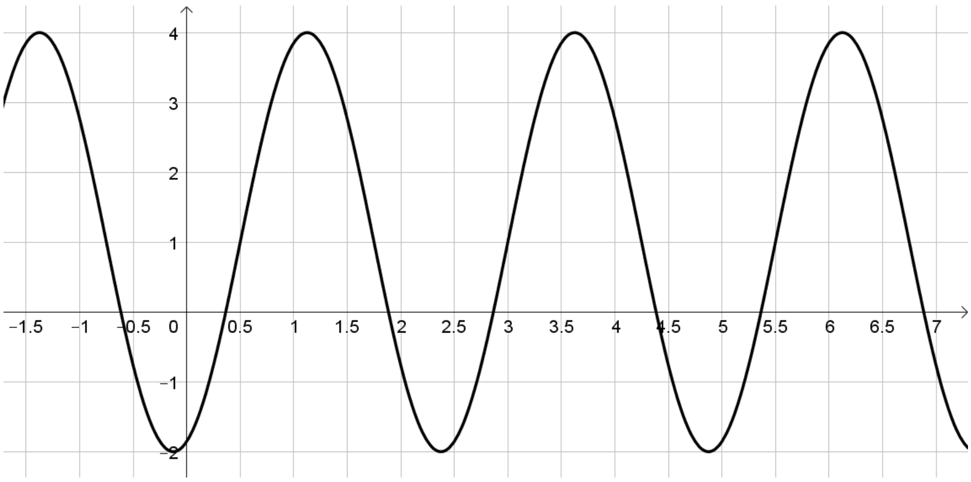
Man kann anstelle des Sinus auch den Kosinus verwenden. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn sich das Objekt zum Zeitpunkt $t = 0$ ganz oben befindet. Befindet es sich ganz unten, so verwendet man am besten ebenfalls den Kosinus und eine negative Amplitude.

In den folgenden Abbildungen wird das Anfangsverhalten der verschiedenen Funktionen dargestellt:



ansteigende Ruhelage | Hochpunkt | abfallende Ruhelage | Tiefpunkt

Beispiel: *Es soll eine Funktionsgleichung bestimmt werden, die den folgenden Funktionsgraphen beschreibt.*



Die Amplitude entspricht der halben vertikalen Differenz zwischen Maximum und Minimum. In diesem Beispiel erhält man $A = 3$.

Der Offset ist $d = 1$, da die Ruhelage der Schwingung um 1 nach oben verschoben ist. Sollte der Offset nicht so leicht ablesbar sein, so kann man vom Maximum die Amplitude abziehen bzw. die Mitte zwischen Maximum und Minimum bestimmen.

Die Frequenz erhält man, indem man den horizontalen Abstand zweier Hochpunkte (oder Tiefpunkte) misst und davon den Kehrwert bildet. Dieser beträgt $\nu = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$.

Möchte man die Sinusfunktion verwenden, so misst man für die Phasenverschiebung ab, um wie viel die erste ansteigende Ruhelage nach rechts verschoben ist (bei der Kosinusfunktion müsste man den ersten Hochpunkt vermessen). Man erhält $\varphi = 0{,}5$.

Die vollständige Funktionsgleichung lautet folgendermaßen:

$$f(t) = 3 \cdot \sin(2\pi \cdot 0{,}4 \cdot (t - 0{,}5)) + 1$$

□

Beispiel: *Ein ruhendes Federpendel, dessen Masse 70 cm über dem Boden hängt, wird um 10 cm nach unten gezogen und zum Zeitpunkt $t = 0$ losgelassen. Es schwingt anschließend mit einer Periodendauer von 1,6 s auf und ab. Es soll eine Funktion erstellt werden, welche die Höhe des Pendels über dem Boden in Abhängigkeit der Zeit beschreibt.*

Die Frequenz ist $\frac{1}{1{,}6} = 0{,}625$. Alle anderen Werte können direkt aus der Angabe übernommen werden. Da sich die Pendelmasse zu Beginn am Tiefpunkt der Schwingung befindet, ist die Verwendung des negativen Kosinus sinnvoll (siehe Abbildung 4 der obigen Gegenüberstellung), da in diesem Fall die Phasenverschiebung null ist. Insgesamt erhält man folgende Funktionsgleichung:

$$f(t) = -10 \cdot \cos(2\pi \cdot 0{,}625 \cdot t) + 70,$$

Dabei ist t die Zeit nach dem Loslassen (in Sekunden) und $f(t)$ die Höhe des Pendels über dem Boden (in Zentimetern). □