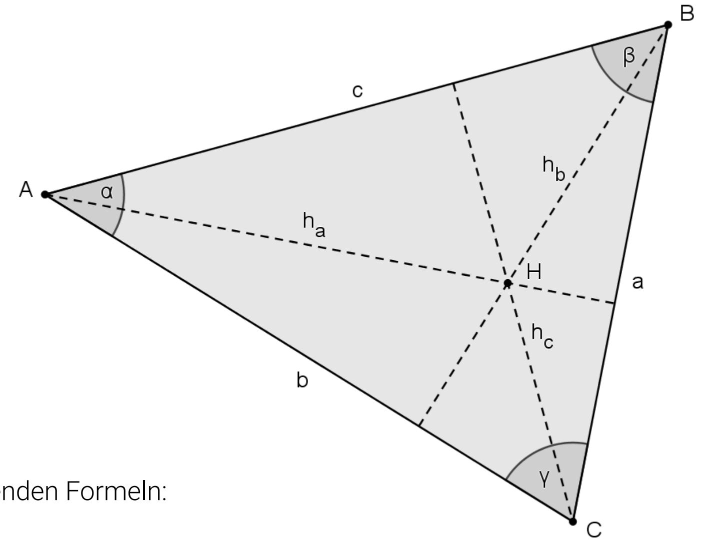
Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Im Vergleich zu den speziellen Dreiecken (rechtwinkliges Dreieck, gleichschenkliges Dreieck, gleichseitiges Dreieck) benötigt man beim allgemeinen Dreieck drei unabhängige Angaben, um alle anderen Größen berechnen zu können. Zusätzlich wird die Berechnung der fehlenden Größen dadurch erschwert, dass viele der bisher verwendeten Formeln ihre Gültigkeit verlieren. Beispielsweise gelten die Winkelfunktionen und der Satz von Pythagoras nur im rechtwinkligen Dreieck.

1 Eigenschaften des allgemeinen Dreiecks

In diesem Kapitel werden alle grundlegenden Eigenschaften des allgemeinen Dreiecks sowie die weiterhin gültigen Formeln erläutert. Die in den Formeln vorkommenden Variablen beziehen sich dabei auf folgende Abbildung:



Es gelten die folgenden Formeln:

- Winkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180\,^\circ$
- Umfang: $u = a + b + c$
- Flächenformeln: $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

Außerdem gilt die sogenannte Heronsche Flächenformel, welche nach Heron von Alexandria benannt ist:

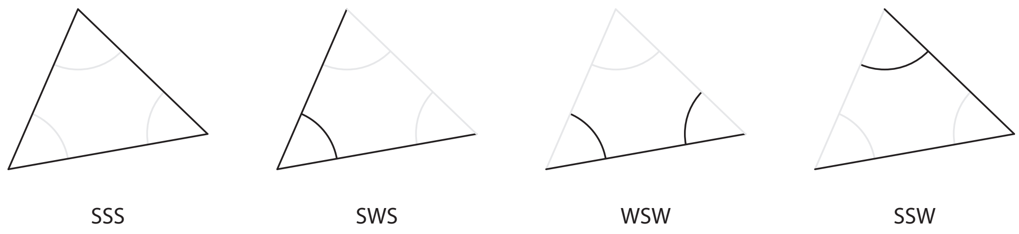
$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \quad \text{mit} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Die Dreiecksungleichung besagt, dass die längste Seite kürzer sein muss als die Summe der beiden anderen Seiten. Ansonsten kann das Dreieck nicht konstruiert werden.

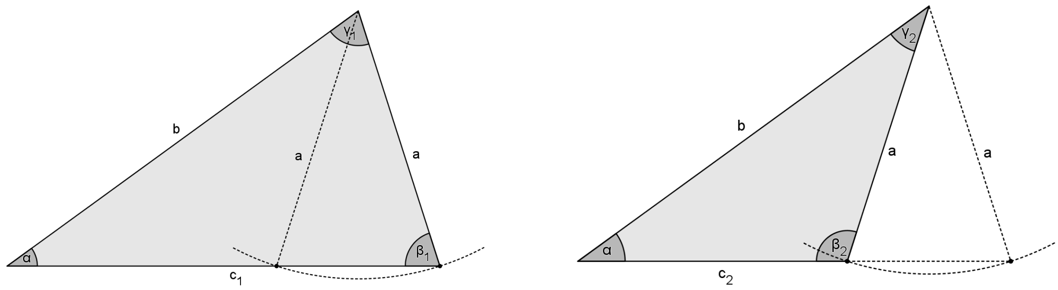
Die drei Höhen des Dreiecks schneiden einander in einem gemeinsamen Punkt, dem sogenannten Höhenschnittpunkt (siehe Punkt H in der obigen Abbildung).

Die Kongruenzsätze besagen, dass ein Dreieck in folgenden vier Fällen eindeutig bestimmt ist:

- SSS-Satz: Alle drei Seitenlängen des Dreiecks sind bekannt.
- SWS-Satz: Zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel sind bekannt.
- WSW-Satz: Eine Seitenlänge und die beiden angrenzenden Winkel sind bekannt.
- SSW-Satz: Zwei Seitenlängen und der der längeren der beiden Seiten gegenüberliegende Winkel sind bekannt.

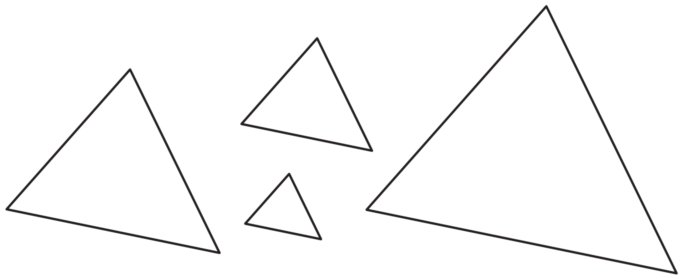


Die nachfolgenden Abbildungen zeigen, warum es beim SSW-Satz wichtig ist, dass der bekannte Winkel der längeren Seite gegenüberliegt.



Da die Seite a kürzer als die Seite b ist, gibt es zwei Möglichkeiten, sie mit dem Zirkel abzuschlagen. Die fehlende Seite c ist daher nicht eindeutig bestimmt. Befindet sich gegenüber des Winkels jedoch die längere Seite, so kann diese nur nach rechts abgeschlagen werden und somit ist das Dreieck eindeutig bestimmt.

Durch die Angabe von drei Winkeln ist ein Dreieck nicht eindeutig bestimmt. Die vier Dreiecke der folgenden Abbildung haben alle dieselben Winkel, jedoch unterschiedliche Seitenlängen.



2 Der Sinussatz

Einer der zentralen Sätze zur Bestimmung fehlender Größen eines allgemeinen Dreiecks ist der sogenannte Sinussatz. Man benötigt dafür eine Seitenlänge und den gegenüberliegenden Winkel sowie einen weiteren Winkel bzw. eine weitere Seitenlänge.

Der Sinussatz lauter folgendermaßen:

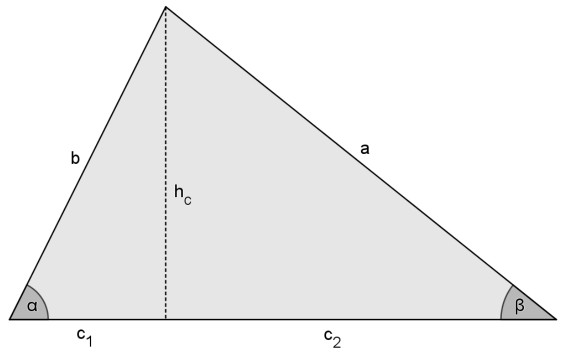
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Herleitung: Bei der Herleitung müssen drei verschiedene Fälle untersucht werden:

- 1. Fall: Falls die Höhe h_c im Inneren des Dreiecks liegt, so teilt sie dieses in zwei rechtwinklige Dreiecke, für welche Folgendes gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \qquad \text{und} \qquad \sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$$

Die untenstehende Abbildung veranschaulicht diesen Sachverhalt.

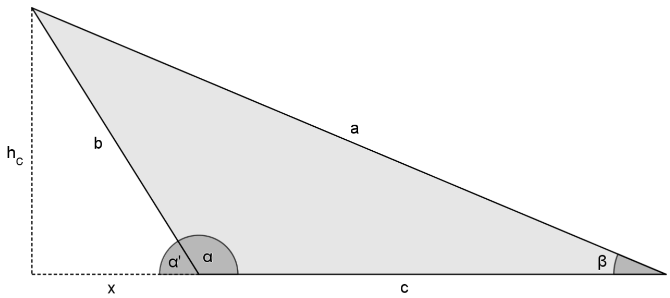


Durch Umformen nach h_c und anschließendes Gleichsetzen erhält man $\sin(\alpha) \cdot b = \sin(\beta) \cdot a$, was auf den oben genannten Sinussatz führt.

– 2. Fall: Ist $\alpha > 90°$, dann liegt die Höhe h_c außerhalb des Dreiecks. Man erhält für die beiden rechtwinkligen Dreiecke folgende Zusammenhänge:

$$\sin(\alpha') = \frac{h_c}{b} \qquad \text{und} \qquad \sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$$

Auch hier soll folgende Abbildung zur besseren Nachvollziehbarkeit beitragen:



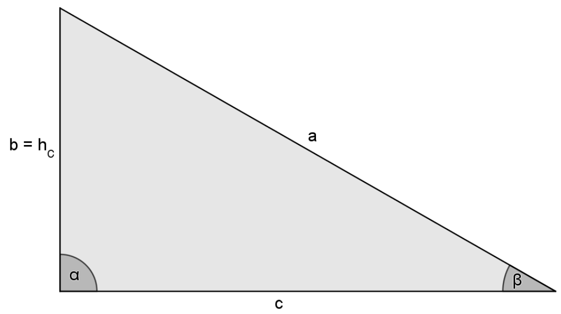
Da α' der Supplementärwinkel von α ist, gilt $\alpha' = 180° - \alpha$. Es gilt außerdem allgemein $\sin(180° - x) = \sin(x)$, was man auch mit dem Taschenrechner für beliebige Winkel überprüfen kann. Somit erhält man

$$\sin(\alpha') = \sin(180\,° - \alpha) = \sin(\alpha).$$

Ab hier erfolgt die Herleitung des Sinussatzes analog zum 1. Fall.

– 3. Fall: Im rechtwinkligen Dreieck gilt folgende Eigenschaft:

$$\sin(\beta) = \frac{b}{a}$$



Wenn α ein rechter Winkel ist, gilt außerdem $\sin(\alpha) = 1$. Somit kann man auf der linken Seite durch $\sin(\alpha)$ dividieren, ohne den Term zu verändern:

$$\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{a}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zum Sinussatz.

Die anderen Teile des Sinussatzes erhält man durch Verwenden einer anderen Höhe. ■

3 Der Kosinussatz

Der Kosinussatz wird ebenfalls zur Bestimmung fehlender Größen eines allgemeinen Dreiecks verwendet. Es gibt hier folgende drei Formulierungen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Diese Formeln enthalten alle drei Seitenlängen und jeweils einen Winkel. Man verwendet sie hauptsächlich, wenn alle drei Seitenlängen bekannt sind, um einen Winkel zu berechnen, oder wenn zwei Seitenlängen und der eingeschlossene Winkel bekannt sind, um die gegenüberliegende Seitenlänge zu berechnen.

Herleitung: Bei der Herleitung des Kosinussatzes muss man ebenfalls drei Fälle gesondert untersuchen. Es werden hier jeweils dieselben Abbildungen wie beim Sinussatz verwendet.

– 1. Fall: Falls α ein spitzer Winkel ist, erhält man folgende drei Zusammenhänge:

$$\cos(\alpha) = \tfrac{c_1}{b} \Leftrightarrow c_1 = b \cdot \cos(\alpha)$$
$$c_1^2 + h_c^2 = b^2 \Leftrightarrow h_c^2 = b^2 - c_1^2 = b^2 - b^2 \cdot \cos^2(\alpha)$$
$$c_2 = c - c_1 = c - b \cdot \cos(\alpha)$$

Verwendet man diese Zusammenhänge, so erhält man letztendlich

$$\begin{aligned}
a^2 &= h_c^2 + c_2^2 \\
a^2 &= b^2 - b^2 \cdot \cos^2(\alpha) + (c - b \cdot \cos(\alpha)) \\
a^2 &= b^2 - b^2 \cdot \cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot \cos^2(\alpha) \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

– 2. Fall: Wenn es sich bei α um einen stumpfen Winkel handelt, erhält man die beiden unten beschriebenen Zusammenhänge. Es wird dabei die allgemeingültige Eigenschaft $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ des Kosinus verwendet, welche man mit dem Taschenrechner für beliebige Winkel überprüfen kann.

$$\cos(180\,° - \alpha) = \tfrac{x}{b} \Leftrightarrow x = b \cdot \cos(180\,° - \alpha) = -b \cdot \cos(\alpha)$$
$$h_c^2 = b^2 - x^2 = b^2 - (-b \cdot \cos(\alpha))^2 = b^2 - b^2 \cdot \cos^2(\alpha)$$

Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned}
a^2 &= h_c^2 + (c + x)^2 \\
a^2 &= b^2 - b^2 \cdot \cos^2(\alpha) + (c - b \cdot \cos(\alpha))^2 \\
a^2 &= b^2 - b^2 \cdot \cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) + b^2 \cdot \cos^2(\alpha) \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)
\end{aligned}$$

– 3. Fall: Wenn α ein rechter Winkel ist, gilt der Satz des Pythagoras, also $a^2 = b^2 + c^2$. Wegen $\cos(90°) = 0$ gilt, ändert sich jedoch auch nichts, wenn man auf der rechten Seite den Term $2bc \cdot \cos(\alpha)$ subtrahiert, da dieser den Wert 0 hat.

Für die anderen beiden Winkel funktioniert die Herleitung auf dieselbe Weise. ■

Wie bereits der 3. Fall der obigen Herleitung verdeutlicht hat, ist der Kosinussatz eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für allgemeine Dreiecke.

4 Trigonometrische Flächenformel

Neben den Höhenformeln und der Heronschen Flächenformel gibt es drei weitere Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks. Man benötigt dafür zwei Seitenlängen und den eingeschlossenen Winkel:

$$A = \frac{ab \cdot \sin(\gamma)}{2} = \frac{ac \cdot \sin(\beta)}{2} = \frac{bc \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

Herleitung: Auch hier müssen bei der Herleitung dieselben drei Fälle unterschieden werden, und es werden dafür erneut dieselben Abbildungen wie bereits beim Sinussatz und beim Kosinussatz herangezogen.

– 1. Fall: Es gilt $\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$. Durch Umformen erhält man $h_c = b \cdot \sin(\alpha)$. Setzt man dies in die bekannte Flächenformel ein, so folgt

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{bc \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

– 2. Fall: Unter Verwendung der bereits beim Sinussatz vorkommenden Eigenschaft $\sin(180° - x) = \sin(x)$ erhält man:

$$\sin(\alpha') = \frac{h_c}{b} \Rightarrow \sin(180\,° - \alpha) = \frac{h_c}{b} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$$

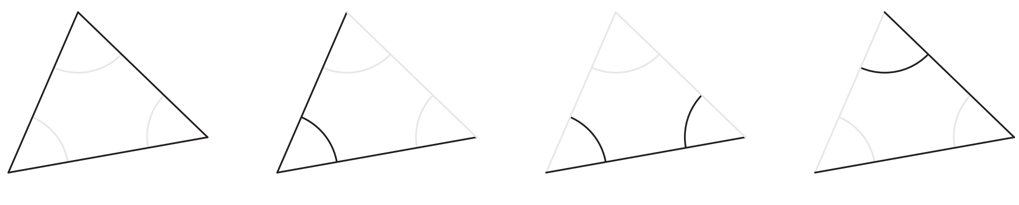
Durch Einsetzen in die bekannte Flächenformel erhält man wie im 1. Fall die gesuchte trigonometrische Flächenformel.

– 3. Fall: Da $\sin(90°) = 1$ gilt, ist die trigonometrische Flächenformel in diesem Fall gleichwertig zur Formel $A = \frac{b \cdot c}{2}$, welche im rechtwinkligen Dreieck für die Katheten b und c gültig ist.

Die anderen beiden Formeln erhält man auf dieselbe Weise. ■

5 Aufgabentypen

Dieses Kapitel erläutert, welche Lösungsstrategien bei den verschiedenen Aufgabentypen (siehe Kongruenzsätze auf Seite 1) gewählt werden können. Nachfolgend werden die vier Typen nochmals abgebildet:



– **SSS:** Durch Umformen des Kosinussatzes können grundsätzlich alle Winkel berechnet werden. Da die Anwendung des Kosinussatzes aufwändig ist, kann ab dem zweiten Winkel auch der Sinussatz verwendet werden. In diesem Fall muss jedoch mit dem Kosinussatz zu Beginn der größte Winkel (also jener gegenüber der längsten Seite) berechnet werden. Andernfalls ist das Ergebnis aus den auf Seite 2 genannten Gründen möglicherweise nicht eindeutig. Der dritte Winkel sollte mit der Winkelsumme berechnet werden.

– **SWS:** Zu Beginn wird mittels Kosinussatz die fehlende Seitenlänge berechnet. Danach kann mit dem Sinussatz (oder dem Kosinussatz) ein weiterer Winkel ermittelt werden. Der letzte Winkel sollte durch die Winkelsumme bestimmt werden.

– **WSW:** Durch die Winkelsumme wird der dritte Winkel ermittelt. Die Berechnung der beiden Seitenlängen erfolgt durch den Sinussatz. Die letzte Seite könnte auch durch den Kosinussatz bestimmt werden.

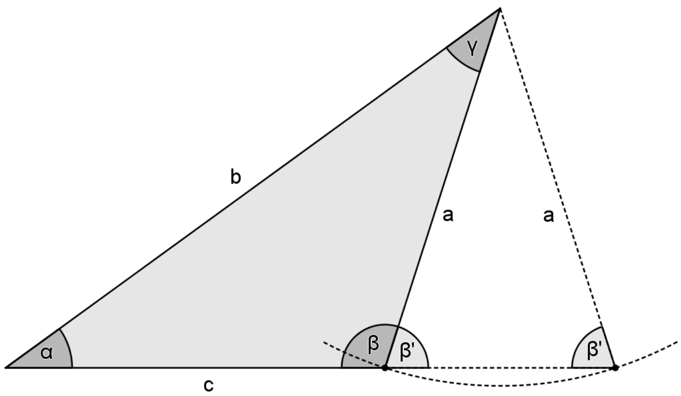
– **SSS:** Zuerst wird durch den Sinussatz der Winkel berechnet, welcher der bekannten Seite gegenüberliegt. Falls dieser Winkel stumpf sein soll, muss das Ergebnis des Sinussatzes von 180° subtrahiert werden, denn das Ergebnis des Arkussinus ist immer kleiner oder gleich 90°. Diese Vorgehensweise wird auch durch das folgende Beispiel dargestellt. Als nächstes wird durch die Winkelsumme der letzte Winkel berechnet. Abschließend wird mittels Kosinussatz die dritte Seitenlänge ermittelt.

Beispiel: *Es sind die Seitenlängen $a = 35\,\mathrm{mm}$ und $b = 58\,\mathrm{mm}$ sowie der Winkel $\alpha = 36°$ bekannt. Es soll die fehlende Seitenlänge, die fehlenden Winkel und der Flächeninhalt berechnet werden. Dabei soll der Winkel β stumpf sein.*

Mit dem Sinussatz wird der Winkel β_1 folgendermaßen berechnet:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta_1)}{b} \Rightarrow \frac{\sin(36°)}{35} = \frac{\sin(\beta_1)}{58} \Rightarrow \beta_1 = \arcsin\left(\frac{\sin(36°)}{35} \cdot 58\right) \approx 76{,}91°$$

Da das Ergebnis des Arkussinus immer kleiner oder gleich 90° ist, wurde mit der obigen Rechnung der Winkel β' der folgenden Abbildung berechnet. Wie die Abbildung zeigt, ist der gesuchte Winkel β der Supplementärwinkel von β'.



Somit ergibt sich für β folgendes Resultat:

$$\beta \approx 180° - 76{,}91° = 103{,}09°$$

Den Winkel γ erhält man über die Winkelsumme:

$$\gamma \approx 180° - 103{,}09° - 36° = 40{,}91°$$

Die fehlende Seitenlänge c wird durch den Kosinussatz berechnet:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)} \approx \sqrt{35^2 + 58^2 - 2 \cdot 35 \cdot 58 \cdot \cos(40{,}91°)} \approx 38{,}00\,\mathrm{mm}$$

Durch die trigonometrische Flächenformel wird schließlich der Flächeninhalt berechnet:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\gamma)}{2} \approx \frac{35 \cdot 58 \cdot \sin(40{,}91°)}{2} \approx 663{,}70\,\mathrm{mm}^2$$

□