Rationale Zahlen

Eine rationale Zahl ist das Verhältnis zweier ganzer Zahlen. Die Menge aller rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet, was sich vom Wort „Quotient" ableitet. Rationale Zahlen können einerseits als Bruch und andererseits als endliche oder periodische Dezimalzahl geschrieben werden.

1 Rechnen mit Brüchen

Ein Bruch besteht aus zwei ganzen Zahlen, welche durch den sogenannten Bruchstrich getrennt werden. Oben befindet sich der Zähler und unten der Nenner.

Um den Kehrwert des Bruches zu erhalten, vertauscht man Zähler und Nenner. Der Kehrwert von $\frac{3}{5}$ lautet beispielsweise $\frac{5}{3}$. Außerdem ist es häufig notwendig, eine ganze Zahl als Bruch zu schreiben. Dazu wird die Zahl in den Zähler geschrieben und als Nenner die Zahl 1 verwendet. Beispielsweise kann die Zahl 5 als $\frac{5}{1}$ geschrieben werden.

1.1 Kürzen und Erweitern

Im Vergleich zu den ganzen Zahlen gibt es bei den Brüchen mehrere Darstellungen, welche denselben Wert besitzen. Beispielsweise haben die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{50}{100}$ denselben Wert.

Werden Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert, so ändert sich der Wert des Bruches nicht. Man bezeichnet das als Kürzen. Ebenso dürfen Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert werden. In diesem Fall spricht man vom Erweitern.

Am Ende einer Rechnung sollten Brüche immer so weit wie möglich gekürzt werden.

1.2 Addition und Subtraktion

Um Brüche addieren bzw. subtrahieren zu können, müssen sie zuvor durch Kürzen bzw. Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden.

Man kann einen gemeinsamen Nenner erhalten, indem man die Nenner aller Brüche multipliziert. Dies ist jedoch nicht vorteilhaft, da hier meistens unnötig große Zahlen entstehen. Besser ist es, das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner zu bestimmen. Man erhält auf diese Weise den kleinsten gemeinsamen Nenner.

Haben alle Brüche den gleichen Nenner, so können die Zähler addiert bzw. subtrahiert werden. Die Nenner bleiben dabei unverändert.

Beispiel: *Es soll das Ergebnis des folgenden Ausdrucks bestimmt werden:*

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 3 und 6 ist 12. Daher müssen alle Brüche auf den Nenner 12 erweitert werden. Anschließend werden die Zähler zusammengefasst. Am Ende wird das Ergebnis gekürzt.

$$\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{4\cdot 4}{3\cdot 4}-\frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{3}{12}+\frac{16}{12}-\frac{10}{12}=\frac{3+16-10}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

□

1.3 Multiplikation

Die Multiplikation von Brüchen ist im Vergleich zur Addition und Subtraktion relativ einfach. Es werden dazu lediglich die beiden Zähler und die beiden Nenner multipliziert. Allgemein gilt also folgende Regel:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Falls möglich, sollten die Brüche vorher gekürzt werden, da sonst einerseits die Multiplikation schwieriger ist und andererseits die dadurch entstehenden Zahlen im Anschluss nicht so einfach gekürzt werden können.

Da die beiden Zähler und die beiden Nenner ohnehin nachher multipliziert werden, kann hier auch „kreuzweise" gekürzt werden. Das heißt, man könnte zum Beispiel die Zahlen a und d kürzen.

Beispiel: *Es soll das Ergebnis des folgenden Ausdrucks bestimmt werden.*

$$\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{16} = \frac{12}{5} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$$

Hier wurden zuerst 25 und 15 gekürzt und anschließend 12 und 16. □

1.4 Division

Um zwei Brüche zu dividieren, wird in der Praxis stattdessen eine Multiplikation mit dem Kehrwert des zweiten Bruches durchgeführt. Es gilt daher folgende Regel:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Herleitung: Ausgangsbasis bildet die folgende Gleichung:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x$$

Dabei steht die Variable x für das unbekannte Ergebnis der Division. Im ersten Schritt werden beide Seiten der Gleichung mit $\frac{c}{d}$ multipliziert, was zu folgendem Resultat führt:

$$\frac{a}{b} = x \cdot \frac{c}{d}$$

Nun werden beide Seiten mit d multipliziert und durch c dividiert:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = x$$

Auf der rechten Seite bleibt erneut der Wert x übrig. Somit müssen die linken Seiten $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ und $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ gleichwertig sein und man kann daher die Division durch eine Multiplikation mit dem Kehrwert ersetzen. ■

Auch hier sollte bereits vorher gekürzt werden. Bei der Division können die beiden Nenner und die beiden Zähler gekürzt werden. Kreuzweise kann bei der Division nicht gekürzt werden. Das ist erst möglich, wenn die Division durch eine Multiplikation mit dem Kehrwert ersetzt wurde.

1.5 Doppelbrüche

Unter einem Doppelbruch versteht man einen Ausdruck folgender Gestalt:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Es handelt sich dabei um die Division zweier Brüche, weshalb das Ergebnis gleich ist, wie im vorherigen Abschnitt:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Häufig verwendet man in diesem Zusammenhang auch die Merkregel „außen mal außen durch innen mal innen".

Beispiel: *Es soll das Ergebnis des folgenden Ausdrucks bestimmt werden:*

$$\frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{5} - 1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{5}}$$

Der obige Ausdruck kann auch als Division geschrieben werden:

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{12}{5} - 1\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)$$

Im nächsten Schritt werden die Klammern jeweils zu einem einzigen Bruch zusammengefasst und anschließend die Division durchgeführt:

$$\left(\frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5} - 1\right) : \left(\frac{5}{15} + \frac{6}{15}\right) = \left(\frac{9}{5} - \frac{5}{5}\right) : \frac{11}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{11} = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{11}$$

□

1.6 Gemischte Brüche

Bei einem gemischten Bruch wird zuerst der ganzzahlige Anteil angeschrieben und rechts daneben der verbleibende Bruch, dessen Wert nun kleiner als 1 ist. Ein Beispiel dafür wäre $3\,\frac{1}{2}$.

In der Mathematik ist diese Schreibweise nicht üblich, da die Rechenoperationen mit dieser Schreibweise nicht so einfach durchführbar sind und weil sie bei der Verwendung von Variablen nicht eingesetzt werden kann. Im Alltag ist sie eventuell nützlicher, da man schnell einen Überblick über den Wert der Zahl bekommt, denn $3\,\frac{1}{2}$ ist intuitiv leichter vorstellbar als $\frac{7}{2}$.

2 Verhältnisse

Durch ein Verhältnis wird beschrieben, wie verschiedene Größen zueinander stehen. Verwendet werden Verhältnisse beispielsweise bei Maßstäben, Kochrezepten, Mischungen (Legierungen, Farben) oder Gewinnaufteilungen. Angegeben wird ein Verhältnis in der Form $a : b : c : ....$

Kennt man den Wert einer einzigen Größe, so können damit alle anderen Größen bestimmt werden. Dazu berechnet man einen einzelnen Teil des Verhältnisses und multipliziert ihn mit den entsprechenden Koeffizienten.

Beispiel: *Beim sogenannten 1-2-3-Teig werden Mehl, Butter und Zucker im Verhältnis $3 : 2 : 1$ gemischt. Es soll berechnet werden, welche Menge der übrigen Zutaten benötigt wird, wenn 180 g Butter verwendet werden sollen.*

180 g entsprechen zwei Teilen. Ein Teil sind daher $180 : 2 = 90$ g. Drei Teile sind $90 \cdot 3 = 270$ g. Man benötigt somit 270 g Mehl und 90 g Zucker. □

Kennt man den Gesamtwert aller Teile zusammen, so muss man zunächst ermitteln, wie viele Teile es insgesamt gibt und den Gesamtwert durch diese Anzahl dividieren, um einen Teil zu erhalten. Dieser Wert wird anschließend (wie schon im vorherigen Beispiel) mit den entsprechenden Koeffizienten multipliziert.

Beispiel: *Eine Erbschaft von 135 000 € soll im Verhältnis $10:6:5:3$ auf die vier Erben aufgeteilt werden. Es soll berechnet werden, wie viel jeder bekommt.*

Insgesamt gibt es $10+6+5+3=24$ Teile. Ein Teil entspricht daher $135\,000:24=5625$ €. Die vier Personen erhalten somit die Beträge 56 250 €, 33 750 €, 28 125 € und 16 875 €. □

3 Dezimalzahlen

Neben der Bruchdarstellung kann jede rationale Zahl entweder als Dezimalzahl mit endlicher Anzahl an Nachkommastellen oder als periodische Dezimalzahl dargestellt werden.

3.1 Periodische Dezimalzahlen

Unter einer periodischen Dezimalzahl versteht man eine Dezimalzahl, bei welcher sich eine bestimmte Ziffernsequenz ohne Unterbrechung unendlich oft wiederholt.

Ein Beispiel dafür ist die Zahl 12,04327327327327... In diesem Fall ist die Periode 327 und die Periodenlänge beträgt 3. Man kann diese Zahl auch schreiben als $12{,}04\overline{327}$ bzw. $12{,}04\dot{3}2\dot{7}$. Die letztere Schreibweise ist eigentlich nur bei Zahlen mit Periodenlänge 1 gebräuchlich.

3.2 Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen

Um einen Bruch in die Dezimaldarstellung umzuwandeln, schreibt man ihn als Division führt die schriftliche Division mit Rest durch. Abgebrochen wird, sobald einer der folgenden beiden Fälle eintritt:

- Man erhält den Rest 0. In diesem Fall handelt es sich um eine endliche Dezimalzahl.
- Man erhält einen Rest, der bereits zuvor einmal vorgekommen ist. In diesem Fall handelt es sich um eine periodische Dezimalzahl. Die Periode erstreckt sich vom ersten Vorkommen des Restes bis zum Ende.

Wenn $\frac{m}{n}$ ein vollständig gekürzter Bruch ist, so ist die maximale Periodenlänge der zugehörigen Dezimalzahl $n-1$, denn es gibt nur $n-1$ verschiedene Reste ungleich 0 und daher muss spätestens der n-te Rest zum Abbruch der Division führen, da er bereits zuvor einmal vorgekommen ist.

3.3 Umwandlung von endlichen Dezimalzahlen in Brüche

Bei einer endlichen Dezimalzahlen z ermittelt man zunächst die Anzahl an Nachkommastellen. Gibt es k Nachkommastellen, so lautet der Ansatz folgendermaßen:

$$\frac{z\cdot 10^k}{10^k}$$

Dadurch wird sichergestellt, dass der Zähler einer ganzen Zahl entspricht. Anschließend wird vollständig gekürzt.

Beispiel: *Die Zahl $17{,}925$ soll in einen gekürzten Bruch umgewandelt werden.*

Die Anzahl an Nachkommastellen ist 3, weshalb die Zahl mit $10^3=1000$ erweitert wird. Anschließend wird so weit wie möglich gekürzt.

$$17{,}925=\frac{17925}{1000}=\frac{3585}{200}=\frac{717}{40}$$

□

3.4 Umwandlung von periodischen Dezimalzahlen in Brüche

Bei einer periodischen Dezimalzahl z wird zunächst die Periodenlänge p ermittelt. Die gegebene Zahl z wird anschließend mit 10^p multipliziert. Ziel ist es, die Periode durch Subtraktion wegfallen zu lassen.

Dies ist der Fall, wenn $10^p \cdot z - z$ berechnet wird, da hier die Periode genau übereinander steht. Das Ergebnis der Subtraktion muss anschließend noch durch den Faktor $10^p - 1$ dividiert werden und passend gekürzt bzw. erweitert werden.

Beispiel: *Die Zahl $z = 1{,}02\overline{573}$ soll in einen Bruch umgewandelt werden.*

Die Periodenlänge ist 3, weshalb z mit $10^3 = 1000$ multipliziert wird. Man schreibt nun $1000z$ und z übereinander und führt die Subtraktion durch:

$$\begin{aligned} 1025{,}735\,735\,73\ldots &= 1000z \\ 1{,}025\,735\,73\ldots &= z \\ 1024{,}710\,000\,00\ldots &= 999z \end{aligned}$$

Durch Umformen der Gleichung $999z = 1024{,}71$ und anschließendes Kürzen erhält man

$$z = \frac{1024{,}71}{999} = \frac{102471}{99900} = \frac{34157}{33300}.$$

□

Beispiel: *Es soll die Zahl $z = 0{,}\dot{9}$ in einen Bruch umgewandelt werden.*

Durch Multiplikation mit 10 erhält man $10z = 9{,}\dot{9}$. Die Subtraktion führt zur Gleichung $9z = 9$ und daraus folgt $z = 1$. Die periodische Zahl $0{,}\dot{9}$ ist somit nicht nur fast 1 sondern tatsächlich exakt 1. □