Quadratische Gleichungen

In diesem Skriptum werden gelegentlich komplexe Zahlen thematisiert. Diese sind nicht im Lehrplan aller Schultypen enthalten, weshalb die entsprechenden Abschnitte gegebenenfalls ignoriert werden können.

Eine quadratische Gleichung hat allgemein die Form $ax^2 + bx + c = 0$. Dabei sind a, b und c beliebige reelle Zahlen mit der Bedingung $a \neq 0$. Man bezeichnet ax^2 als quadratisches Glied, bx als lineares Glied und c als Absolutglied.

Die Zahl a wird Leitkoeffizient genannt. Wenn $a = 1$ erfüllt ist, spricht man von einer normierten quadratischen Gleichung. Man verwendet in diesem Fall für die Koeffizienten häufig die Bezeichnungen p und q, wodurch die Gleichung dann $x^2 + px + q = 0$ lautet.

Eine quadratische Gleichung kann folgende Lösungsfälle aufweisen:

- zwei reelle Lösungen
- eine einzige reelle Lösung
- keine reelle Lösung (zwei zueinander konjugierte komplexe Lösungen)

Die Lösungen werden dabei häufig mit x_1 und x_2 bezeichnet. Speziell im komplexen Fall oder beim Einsetzen in die Lösungsformel ist auch die Schreibweise $x_{1,2}$ gebräuchlich, um beide Lösungen gleichzeitig anzugeben.

Im folgenden Kapitel werden zunächst einige Spezialfälle behandelt, für welche die Lösung einfach berechnet werden kann. Anschließend werden allgemeine Lösungsverfahren erläutert.

1 Spezialfälle von quadratischen Gleichungen

1.1 Reinquadratische Gleichung

Bei einer sogenannten „reinquadratischen Gleichung“ fällt das lineare Glied weg, d. h. $b = 0$ ist erfüllt. Eine solche Gleichung kann man durch Isolieren von x^2 und anschließendes Wurzelziehen lösen. Man muss jedoch beachten, dass dadurch zwei Lösungen entstehen, die positive und die negative Wurzel.

Beispiel: *Es sollen alle Lösungen der Gleichung $4x^2 - 9 = 0$ berechnet werden.*

Im ersten Schritt wird soweit umgeformt, dass x^2 alleine steht:

$$4x^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{9}{4}$$

Anschließend wird auf beiden Seiten die Wurzel gezogen:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

Zu beachten ist, dass durch das Wurzelziehen eine positive und eine negative Lösung entstehen. Denn würde man die Lösungen quadrieren, so würde man in beiden Fällen $\frac{9}{4}$ erhalten. □

Beispiel: *Es sollen alle Lösungen der Gleichung $x^2 + 25 = 0$ berechnet werden.*

Im ersten Schritt wird soweit umgeformt, dass x^2 alleine steht:

$$x^2 + 25 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = -25$$

Nun wird auf beiden Seiten die Wurzel gezogen. Da rechts eine negative Zahl steht, führt dies auf eine komplexe Lösung:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$$

□

1.2 Homogene quadratische Gleichung

Bei einer homogenen quadratischen Gleichung gibt es kein Absolutglied, d. h. es gilt $c = 0$. Man löst eine derartige Gleichung durch Herausheben von x und Anwenden des Satzes vom Nullprodukt: Ein Produkt ist genau dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

Beispiel: *Es soll die Gleichung $x^2 + 3x = 0$ gelöst werden.*

Auf der linken Seite kann x herausgehoben werden.

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x + 3) = 0$$

Das Produkt $x \cdot (x + 3)$ ergibt 0, wenn entweder $x = 0$ oder $x = -3$ gilt. Daher sind die beiden Lösungen dieser Gleichung 0 und -3. □

Beispiel: *Es soll die Gleichung $5x^2 - 20x = 0$ gelöst werden.*

Auf der linken Seite kann x herausgehoben werden.

$$5x^2 - 20x = 0 \Rightarrow 5x \cdot (x - 4) = 0$$

Hier sind die beiden Lösungen 0 und 4, da damit entweder der linke oder der rechte Faktor 0 ist und somit das gesamte Produkt 0 ergibt. □

2 Lösungsmethoden

In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Methoden vorgestellt, mit denen quadratische Gleichungen gelöst werden können.

2.1 Quadratisches Ergänzen

Möchte man eine quadratische Gleichung lösen, die nicht einem der beiden oben genannten Spezialfälle entspricht, so kann man die Methode des quadratischen Ergänzens verwenden. Dabei wird die Gleichung zunächst mit Hilfe der binomischen Formeln in die Gestalt eines Binoms gebracht, wodurch man anschließend durch Wurzelziehen die beiden Lösungen bestimmen kann. Ein allgemeines Rezept dafür lautet folgendermaßen:

1. Division der Gleichung durch den Leitkoeffizienten
2. Isolieren des Absolutgliedes auf einer Seite
3. Ergänzen zu einem vollständigen Quadrat eines Binoms (dazu wird auf beiden Seiten das Quadrat der Hälfte des Betrages des Koeffizienten des linearen Gliedes addiert)
4. Mittels Umkehrung der binomischen Formeln vereinfachen
5. Wurzel ziehen (es entstehen dadurch zwei Gleichungen)
6. Bestimmen der Lösungen der beiden Gleichungen

Beispiel: *Es soll die Gleichung $5x^2 - 25x - 70 = 0$ durch quadratisches Ergänzen gelöst werden.*

1. $x^2 - 5x - 14 = 0$ (Division durch den Leitkoeffizient 5)
2. $x^2 - 5x = 14$
3. $x^2 - 5x + (\frac{5}{2})^2 = 14 + (\frac{5}{2})^2$
4. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$
5. $x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4}} = \pm\frac{9}{2}$ (beidseitiges Wurzelziehen)
6. $x - \frac{5}{2} = +\frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{14}{2} = 7$ und $x - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2$

Die Lösungen dieser Gleichung sind daher 7 und -2. □

2.2 Allgemeine Lösungsformel

Die Methode des quadratischen Ergänzens ist in der Praxis relativ zeitaufwändig. Sie kann jedoch verwendet werden, um eine praktische Formel herzuleiten, mit welcher die beiden Lösungen einer allgemeinen quadratischen Gleichung berechnet werden können. Es wird nun nicht wie im obigen Beispiel eine bestimmte quadratische Gleichung durch quadratisches Ergänzen gelöst, sondern die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit beliebigen Koeffizienten.

Herleitung:

1. Die Gleichung wird durch den Leitkoeffizient a dividiert:
   $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
2. Das Absolutglied wird auf die rechte Seite gebracht:
   $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
3. Es wird zu einem vollständigen Quadrat eines Binoms ergänzt:
   $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
   Die rechte Seite wird außerdem vereinfacht (gemeinsamer Nenner):
   $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac+b^2}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$
4. Die linke Seite wird zu einem Binom zusammengefasst:
   $\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$
5. Auf beiden Seiten wird die Wurzel gezogen.
   $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
6. Die Gleichung wird nach x aufgelöst:
   $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

■

Die allgemeine Lösungsformel der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ lautet somit:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel: *Es soll die Gleichung $7x^2 - 14x - 168 = 0$ gelöst werden.*

Die Koeffizienten für die Lösungsformel lauten $a = 7$, $b = -14$ und $c = -168$. Durch Einsetzen erhält man:

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-168)}}{2 \cdot 7} = \frac{14 \pm \sqrt{4900}}{14} = \frac{14 \pm 70}{14} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6, x_2 = -4$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind also 6 und -4. □

Beispiel: *Es soll die Gleichung* $3x^2 - 30x + 87 = 0$ *gelöst werden.*

Die Koeffizienten für die Lösungsformel lauten $a = 3$, $b = -30$ und $c = 87$. Durch Einsetzen erhält man:

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 87}}{2 \cdot 3} = \frac{30 \pm \sqrt{-144}}{6} = \frac{30 \pm 12i}{6} = 5 \pm 2i$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind also die zueinander konjugierten komplexen Zahlen $5 + 2i$ und $5 - 2i$. □

2.3 Kleine Lösungsformel

Grundsätzlich wurde mit der allgemeinen Lösungsformel eine Methode gefunden, mit der die Lösungen jeder quadratischen Gleichung relativ bequem berechnet werden können. Für normierte quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ kann man die Lösungsformel jedoch etwas kompakter anschreiben:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Herleitung: In der allgemeinen Lösungsformel werden zunächst die Ersetzungen $a \mapsto 1$, $b \mapsto p$ und $c \mapsto q$ durchgeführt. Das gewünschte Resultat erhält man durch folgende Umformung:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4 \cdot 1 \cdot q}}{2 \cdot 1} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

■

Beispiel: *Es soll die Gleichung* $5x^2 - 8x + 2{,}4 = 0$ *mit Hilfe der kleinen Lösungsformel gelöst werden*

Dazu muss die Gleichung zuerst normiert werden, indem man durch den Leitkoeffizient 5 dividiert. Man erhält $x^2 - 1{,}6x + 0{,}48 = 0$. Einsetzen in die kleine Lösungsformel liefert folgende Ergebnisse:

$$x = -(-0{,}8) \pm \sqrt{(-0{,}8)^2 - 0{,}48} = 0{,}4 \text{ und } 1{,}2$$

□

3 Lösungsfälle

Am Beginn dieses Skriptums wurden drei verschiedene Lösungsfälle quadratischer Gleichungen aufgelistet (Seite 1). In diesem Abschnitt wird erläutert, wann diese Fälle eintreten. Entscheidend dafür ist der Term $b^2 - 4ac$, den man auch als Diskriminante bezeichnet. Diese Bezeichnung leitet sich vom lateinischen Wort *discriminare* ab, was so viel wie „unterscheiden" bedeutet. Konkret werden folgende Fälle unterschieden:

1. Ist die Diskriminante positiv, so gibt es zwei verschiedene reelle Lösungen.
2. Ist die Diskriminante null, so gibt es eine einzige reelle Lösung. Betrachtet man die Lösungsformel, so erkennt man, dass im Zähler einmal 0 addiert und einmal 0 subtrahiert wird, was letztendlich zum selben Ergebnis führt.
3. Ist die Diskriminante negativ, so gibt es keine reelle Lösung, jedoch zwei zueinander konjugierte komplexe Lösungen. Dies liegt daran, dass in der Lösungsformel die Wurzel einer negativen Zahl auftaucht, welche zu einem imaginären Ergebnis führt.

Beispiel: *Es soll untersucht werden, wie viele Lösungen die Gleichungen $5x^2-3x+17=0$ und $4x^2+10x-2=0$ besitzen, ohne dabei die Gleichungen zu lösen.*

Bei der ersten Gleichung lautet die Diskriminante $(-3)^2-4\cdot 5\cdot 17=-331$. Sie ist negativ und daher gibt es zwei komplexe Lösungen, jedoch keine reelle Lösung.

Bei der zweiten Gleichung erhält man $10^2-4\cdot 4\cdot(-2)=132$. Weil die Diskriminante positiv ist, gibt es zwei verschiedene reelle Lösungen. □

4 Satz von Viëta

Der Satz von Viëta beschreibt zwei Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten p und q einer normierten quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$ und deren Lösungen x_1 und x_2. Demzufolge gilt:

$$x_1+x_2=-p \qquad \text{und} \qquad x_1\cdot x_2=q$$

Einen besonderen praktischen Nutzen haben diese beiden Zusammenhänge nicht. Man kann damit jedoch sehr schnell die zweite Lösung einer quadratischen Gleichung bestimmen, wenn man eine Lösung kennt.

Beispiel: *Eine Lösung der Gleichung $x^2+2x-143=0$ ist -13. Es soll die zweite Lösung bestimmt werden.*

Setzt man beispielsweise in die erste Formel ein, so erhält man $-13+x_2=-2$, woraus $x_2=11$ folgt. Die zweite Lösung ist daher 11. □

5 Biquadratische Gleichungen

Eine biquadratische Gleichung ist ein Spezialfall einer quartischen Gleichung (Gleichung mit x^4 als größter Potenz). Sie hat die Form $ax^4+bx^2+c=0$. Allgemein sind die Lösungsmethoden für quartische Gleichungen sehr kompliziert. In diesem Fall ist das Bestimmen der Lösungen jedoch relativ einfach. Man geht folgendermaßen vor:

1. Man führt die Substitution $x^2\mapsto y$ durch und erhält als neue Gleichung die quadratische Gleichung $ay^2+by+c=0$.
2. Diese Gleichung kann nun mit den oben beschriebenen Methoden gelöst werden.
3. Da $y=x^2$ gilt, müssen abschließend die Wurzeln der Lösungen der quadratischen Gleichung berechnet werden. Achtung: Nicht die negative Wurzel vergessen!

Beispiel: *Es sollen alle Lösungen der Gleichung $3x^4-222x^2+3675=0$ bestimmt werden.*

Im ersten Schritt wird x^2 durch die neue Variable y ersetzt. Man erhält die quadratische Gleichung $3y^2-222y+3675=0$. Die Lösungen dieser Gleichung lauten $y_1=49$ und $y_2=25$.

Durch Wurzelziehen dieser Lösungen erhält man schließlich die Lösungen der ursprünglichen biquadratischen Gleichung. Diese lauten $x_{1,2}=\pm\sqrt{49}=\pm 7$ und $x_{3,4}=\pm\sqrt{25}=\pm 5$. □