Quadratische Funktionen

1 Grundlagen

Eine quadratische Funktion ist eine Polynomfunktion, deren höchste Potenz x^2 ist. Im Gegensatz zur linearen Funktion, deren Funktionsgleichung $f(x) = kx + d$ lautet, werden für das Arbeiten mit quadratischen Funktionen verschiedene Darstellungsformen der Funktionsgleichung benötigt:

- Polynomform: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
- Scheitelpunktform: $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$
- Nullstellenform: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

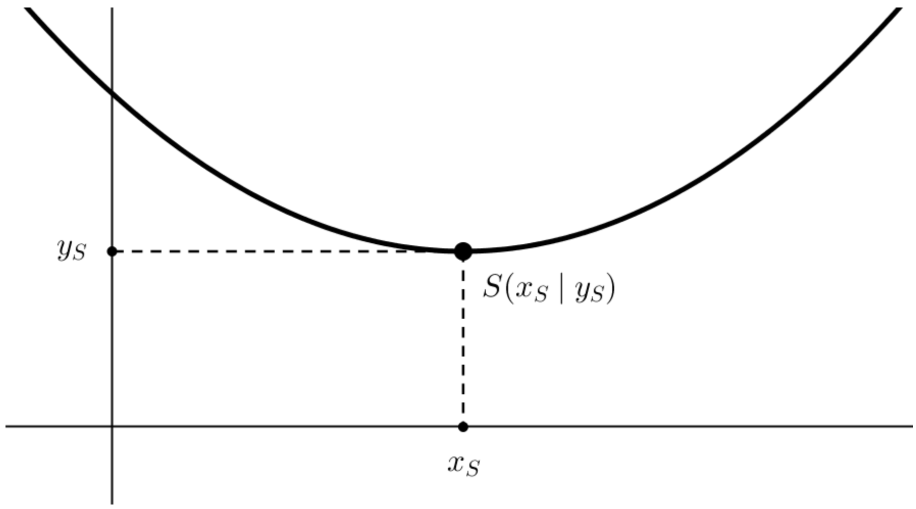
Den Funktionsgraph einer quadratischen Funktion bezeichnet man als Parabel bzw. exakter als quadratische Parabel.

2 Parameter von quadratischen Funktionen

In diesem Abschnitt wird auf die Bedeutung der verschiedenen Parameter von quadratischen Funktionen eingegangen. Der einzige Parameter, der keine direkt ersichtliche Bedeutung hat, ist der Parameter b der Polynomform. Dieser wird daher nachfolgend nicht erläutert.

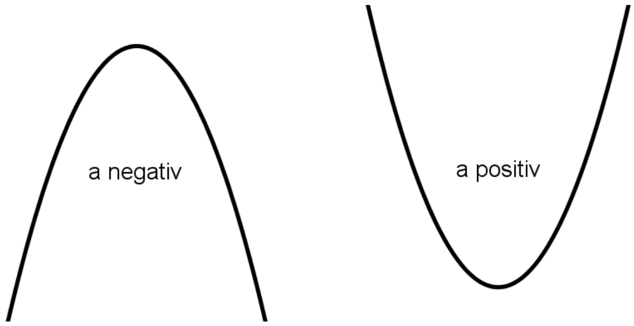
2.1 Scheitelpunkt

Der Scheitelpunkt ist der höchste bzw. tiefste Punkt des Funktionsgraphen (siehe nachfolgende Abbildung). Die Koordinaten des Scheitelpunkts werden mit x_S und y_S bezeichnet. Wie man diese Koordinaten berechnet, hängt von der Darstellungsform der vorliegenden Funktionsgleichung ab. In Kapitel 4 wird ausführlich darauf eingegangen.

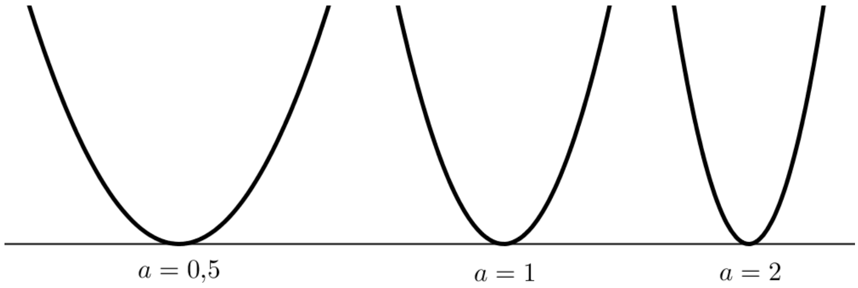


2.2 Die Krümmung der Parabel

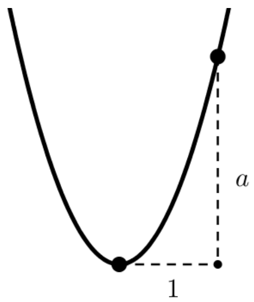
Der Parameter a, welcher in allen drei Darstellungsformen vorkommt, ist ein Maß für die Krümmung der Parabel. Je nach Vorzeichen von a ist die Parabel entweder nach oben geöffnet (positive Krümmung) oder nach unten geöffnet (negative Krümmung).



Außerdem gibt der Betrag von a Auskunft darüber, wie „spitz" die Parabel ist. Je größer $|a|$ ist, umso größer ist die Krümmung betragsmäßig und umso „spitzer" ist dementsprechend die Parabel.



Man kann den Parameter a direkt aus dem Funktionsgraphen ablesen. Dazu markiert man den Scheitelpunkt und geht von diesem aus um 1 nach rechts. Von diesem Punkt aus geht man so weit nach oben bzw. unten, bis der Funktionsgraph erreicht wird. Der vertikale Abstand entspricht dem Parameter a. Ging man nach oben, so ist a positiv. Ging man nach unten, so ist a negativ.

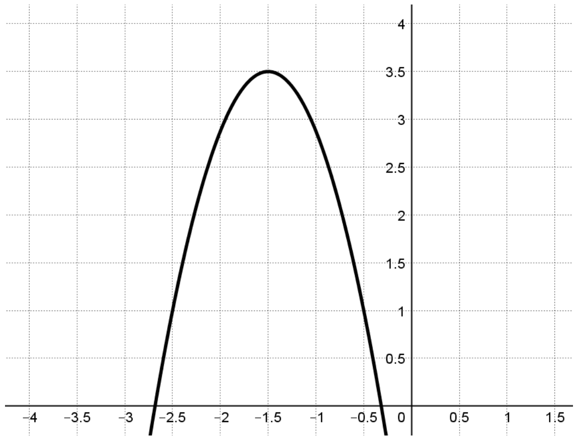


Herleitung: Um die oben beschriebene Vorgehensweise zu begründen, müssen die Funktionswerte an der Stelle des Scheitelpunkts und 1 rechts davon berechnet und verglichen werden. Dazu wird die Scheitelpunktform $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ verwendet.

Setzt man x_S, also die x-Koordinate des Scheitelpunkts, ein, so erhält man $f(x_S) = a \cdot (x_S - x_S)^2 + y_S = a \cdot 0^2 + y_S = y_S$. Setzt man $x_S + 1$ ein, so erhält man $f(x_S + 1) = a \cdot (x_S + 1 - x_S)^2 + y_S = a \cdot 1^2 + y_S = a + y_S$.

Man erkennt, dass der vertikale Abstand zwischen diesen Punkten genau a beträgt. ■

Beispiel: *Es soll eine Funktionsgleichung erstellt werden, welche dem nachfolgend abgebildeten Funktionsgraphen entspricht.*



Der Scheitelpunkt befindet sich bei den Koordinaten $(-1{,}5 \mid 3{,}5)$. Geht man von diesem aus um 1 nach rechts, so muss man 2,5 nach unten gehen, um den Graph zu erreichen. Daher ist der Parameter $a = -2{,}5$. Die vollständige Funktionsgleichung in Scheitelpunktform lautet somit $f(x) = -2{,}5 \cdot (x + 1{,}5)^2 + 3{,}5$. □

2.3 Ordinatenabschnitt

Der Ordinatenabschnitt ist jener Funktionswert, bei welchem der Funktionsgraph die vertikale Achse schneidet. Man spricht daher auch vom y-Achsenabschnitt. Häufig handelt es sich bei anwendungsbezogenen Aufgaben um den Startwert (z. B. die Fixkosten oder die Abwurfhöhe).

Man kann diesen Wert bestimmen, indem man $f(0)$ berechnet.

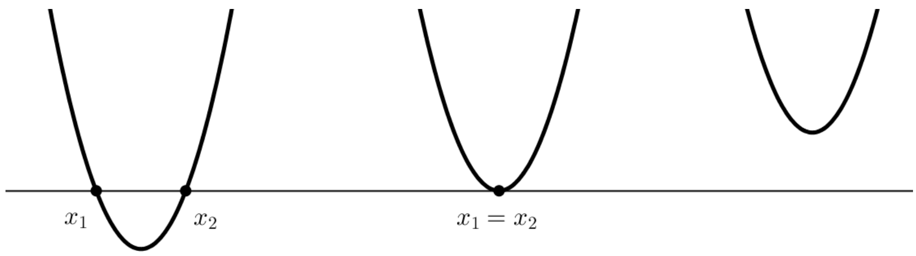
Beispiel: *Es soll der Ordinatenabschnitt der Funktion $f(x) = -2 \cdot (x - 3)^2 + 5$ berechnet werden.*

Setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein, so erhält man $f(0) = -2 \cdot (0 - 3)^2 + 5 = -13$. Somit ist der Ordinatenabschnitt -13 was bedeutet, dass die y-Achse bei -13 geschnitten wird. □

Ist der Ordinatenabschnitt 0, so verläuft der Funktionsgraph durch den Ursprung des Koordinatensystems. Man bezeichnet eine derartige quadratische Funktion als homogen.

2.4 Nullstellen

Die Parameter x_1 und x_2 repräsentieren die Nullstellen der quadratischen Funktion, also jene Stellen, an denen der Funktionsgraph die x-Achse schneidet. Es gibt entweder zwei, eine oder keine Nullstellen. Falls es keine Nullstellen gibt, so gibt es auch keine Nullstellenform. In der nachfolgenden Abbildung werden diese drei Fälle dargestellt.



3 Nullstellen bestimmen

Um die Nullstellen einer quadratischen Funktion zu bestimmen, wird die Gleichung $f(x) = 0$ nach x aufgelöst, da sich die Nullstellen dort befinden, wo der Funktionswert 0 ist. Je nachdem, welche Darstellungsform der Funktionsgleichung vorliegt, sieht die Berechnung unterschiedlich aus.

3.1 Polynomform

Ist die Funktionsgleichung in Polynomform gegeben, so erfolgt die Berechnung mittels der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Beispiel: *Es sollen die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = 3x^2 - 21x + 30$ berechnet werden.*

Dazu muss die Gleichung $0 = 3x^2 - 21x + 30$ gelöst werden. Hierfür werden die Koeffizienten in die Lösungsformel für quadratische Gleichungen eingesetzt. Man erhält folgendes Resultat:

$$x_{1,2} = \frac{21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 3 \cdot 30}}{2 \cdot 3} = \frac{21 \pm 9}{6} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 \text{ und } x_2 = 2$$

Die Nullstellen befinden sich an den Stellen 2 und 5. □

Ist der Term $b^2 - 4ac$ negativ, so kann die in der Lösungsformel vorkommende Quadratwurzel nicht berechnet werden. Somit gibt es keine Lösung und die quadratische Funktion hat daher keine Nullstellen.

Falls $b^2 - 4ac = 0$ erfüllt ist, fällt die Wurzel in der Lösungsformel weg und es gibt daher nur eine einzige Lösung. Dies bedeutet, dass die quadratische Funktion nur eine einzige Nullstelle besitzt, welche zugleich dem Scheitelpunkt entspricht.

3.2 Scheitelpunktform

Ist die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform gegeben, so kann die entsprechende Gleichung durch Umformung gelöst werden, da hier nur ein einziges x vorkommt, welches schrittweise isoliert werden kann.

Beispiel: *Es sollen die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = 2 \cdot (x-4)^2 - 8$ berechnet werden.*

Zunächst wird die Gleichung $0 = 2 \cdot (x-4)^2 - 8$ so weit umgeformt, dass der Term $(x-4)^2$ alleine steht:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot (x-4)^2 - 8 \\ 8 &= 2 \cdot (x-4)^2 \\ 4 &= (x-4)^2 \end{aligned}$$

An dieser Stelle muss man beachten, dass durch das Anwenden der Quadratwurzel eine negative und eine positive Lösung entstehen, also $\pm 2 = x - 4$. Durch beidseitiges Addieren von 4 erhält man schließlich die beiden Nullstellen $x_1 = +2 + 4 = 6$ und $x_2 = -2 + 4 = 2$. □

3.3 Nullstellenform

Aus der Nullstellenform können die Nullstellen direkt ohne Rechnung abgelesen werden. Es ist dabei jedoch auf das Vorzeichen zu achten, da die Nullstellenform grundsätzlich negative Vorzeichen enthält.

Beispiel: *Es sollen die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = 5 \cdot (x-1) \cdot (x+4)$ bestimmt werden.*

Die erste Nullstelle lautet $x_1 = 1$ und die zweite Nullstelle lautet $x_2 = -4$. □

Man sollte sich hier stets die Frage stellen, welche Zahl eingesetzt werden muss, damit die einzelnen Klammern null ergeben. Auf diese Weise sollten keine Unklarheiten bezüglich des Vorzeichens entstehen.

4 Scheitelpunkt bestimmen

Je nach vorgegebener Darstellungsform der Funktionsgleichung bzw. mathematischen Kenntnissen wird der Scheitelpunkt unterschiedlich bestimmt.

4.1 Scheitelpunktform

Ist die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform gegeben, so braucht man die Koordinaten lediglich ablesen. Dabei ist darauf zu achten, dass die x-Koordinate in der Scheitelpunktform grundsätzlich ein negatives Vorzeichen besitzt.

Beispiel: *Es sollen die Koordinaten des Scheitelpunkts anhand der Funktionsgleichung $f(x) = -2 \cdot (x-3)^2 - 5$ bestimmt werden.*

Die x-Koordinate ist $x_S = 3$ und die y-Koordinate lautet $y_S = -5$. □

4.2 Nullstellenform

Kennt man die Nullstellen einer quadratischen Funktion, so ist es relativ einfach, den Scheitelpunkt zu bestimmen. Da eine Parabel immer symmetrisch ist, befindet sich x_S genau in der Mitte der beiden Nullstellen. Man kann diesen Wert daher anhand des arithmetischen Mittelwerts berechnen:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Um den y-Wert des Scheitelpunktes zu erhalten, setzt man x_S in die Funktionsgleichung ein, denn es gilt $y_S = f(x_S)$.

Beispiel: *Es sollen die Koordinaten des Scheitelpunkts anhand der Funktionsgleichung $f(x) = 3 \cdot (x+2) \cdot (x-5)$ berechnet werden.*

Die beiden Nullstellen sind $x_1 = -2$ und $x_2 = 5$. Der arithmetische Mittelwert und somit die x-Koordinate des Scheitelpunkts lautet $x_S = \frac{-2+5}{2} = 1{,}5$. Durch Einsetzen dieses Resultats in die Funktionsgleichung erhält man schließlich die y-Koordinate: $y_S = f(x_S) = 3 \cdot (1{,}5 + 2) \cdot (1{,}5 - 5) = -36{,}75$. Der Scheitelpunkt lautet daher $(1{,}5 \mid -36{,}75)$. □

4.3 Polynomform

Ist die Polynomform gegeben, so gibt es zwei Methoden, um den Scheitelpunkt zu bestimmen. Einerseits kann man, wie in Kapitel 3.1 erläutert, zunächst die Nullstellen berechnen, um mit deren Hilfe anschließend den Scheitelpunkt zu bestimmen (siehe Kapitel 4.2). Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Funktion überhaupt Nullstellen besitzt. Ansonsten müsste man mit sogenannten komplexen Zahlen arbeiten.

Eine andere Möglichkeit ergibt sich durch eine Formel, mit welcher man direkt aus den Parametern a, b, c der Polynomform den x-Wert x_S des Scheitelpunkts erhält. Diese Formel lautet:

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

Herleitung: Gemäß Kapitel 3.1 erhält man die beiden Nullstellen durch folgende Formeln:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Summe $x_1 + x_2$ lautet demnach folgendermaßen:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Um den arithmetischen Mittelwert zu erhalten, muss die Summe noch durch 2 dividiert werden. Es ergibt sich letztendlich die oben genannte Formel $x_S = -\frac{b}{2a}$. ■

Die y-Koordinate des Scheitelpunkts ergibt sich erneut durch Einsetzen der x-Koordinate in die Funktionsgleichung.

Beispiel: *Es sollen die Koordinaten des Scheitelpunkts anhand der Funktionsgleichung $f(x) = 3x^2 - 18x + 29$ berechnet werden.*

Die Diskriminante $b^2 - 4ac$ der quadratischen Gleichung $0 = 3x^2 - 18x + 29$ lautet $(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 29 = -24$ und ist somit negativ. Daher besitzt die gegebene quadratische Gleichung keine Nullstellen. Somit kann nicht der in Kapitel 4.2 beschriebene Umweg über die Nullstellen gewählt werden. Setzt man die Parameter a und b in die oben genannte Formel ein, so erhält man $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-18}{2 \cdot 3} = 3$. Die y-Koordinate erhält man durch Einsetzen in die Funktionsgleichung: $y_S = f(3) = 2$. Somit befindet sich der Scheitelpunkt bei $(3 \mid 2)$. □

4.4 Differentialrechnung

Verfügt man bereits über die Methoden der Differentialrechnung, so ist die Berechnung des Scheitelpunktes, welcher einem Hochpunkt oder einem Tiefpunkt entspricht, für alle Darstellungsformen relativ einfach. Es wird zunächst die Ableitungsfunktion f' berechnet. Löst man anschließend die Gleichung $f'(x) = 0$, so erhält man die x-Koordinate des Scheitelpunkts. Durch Einsetzen der x-Koordinate in die Funktionsgleichung (nicht in die Ableitungsfunkion) erhält man schließlich die y-Koordinate.

Beispiel: *Es sollen die Koordinaten des Scheitelpunkts anhand der Funktionsgleichung $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ berechnet werden.*

Die Ableitungsfunktion lautet $f'(x) = 10x - 3$. Löst man die Gleichung $f'(x) = 0$ bzw. $10x - 3 = 0$, so erhält man die x-Koordinate des Scheitelpunkts mit $x_S = 0{,}3$. Daraus ergibt sich $y_S = f(x_S) = 0{,}55$. □

5 Funktionsgleichung bestimmen

Grundsätzlich benötigt mein drei Punkte, um die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion zu bestimmen. Eine Ausnahme gibt es, wenn man den Scheitelpunkt kennt, da dieser mehr Information liefert. In diesem Fall benötigt man nur einen weiteren Punkt. Folgende Auflistung der häufigsten Fälle soll dabei helfen, je nach Problemstellung die effizienteste Vorgehensweise bei der Bestimmung der Funktionsgleichung zu wählen.

5.1 Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt

Zunächst werden die Koordinaten x_S und y_S in die Grundgleichung der Scheitelpunktform eingesetzt. Außerdem wird der y-Wert des zusätzlichen Punktes für $f(x)$ und der x-Wert für x eingesetzt. Mit dieser Gleichung kann der fehlende Parameter a berechnet werden.

Beispiel: *Eine quadratische Funktion besitzt den Scheitelpunkt* $(2 \mid 1)$ *und der Funktionsgraph verläuft außerdem durch den Punkt* $(7 \mid 11)$*. Es soll anhand dieser Daten die Funktionsgleichung ermittelt werden.*

Setzt man die Koordinaten des Scheitelpunkts in die Grundgleichung der Scheitelpunktform ein, so erhält man $f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 1$. Im zweiten Schritt werden die Koordinaten des zusätzlichen Punktes eingesetzt, was zur Gleichung $11 = a \cdot (7-2)^2 + 1$ führt. Die Lösung dieser Gleichung lautet $a = \frac{2}{5}$. Somit sind alle Parameter der Funktionsgleichung bestimmt und die gesuchte Funktionsgleichung ist $f(x) = \frac{2}{5} \cdot (x-2)^2 + 1$. □

5.2 Beide Nullstellen und ein weiterer Punkt

Im ersten Schritt werden die beiden Nullstellen x_1 und x_2 in die Grundgleichung der Nullstellenform eingesetzt. Des Weiteren werden (wie schon im obigen Fall) der y-Wert des zusätzlichen Punktes für $f(x)$ und der x-Wert für x eingesetzt. Auf diese Weise kann der Parameter a ermittelt werden.

Beispiel: *Eine quadratische Funktion besitzt die beiden Nullstellen* $x_1 = -3$ *und* $x_2 = 6$*. Außerdem verläuft der Funktionsgraph durch den Punkt* $(2 \mid 5)$*. Es soll anhand dieser Daten die Funktionsgleichung ermittelt werden.*

Setzt man die beiden Nullstellen in die Grundgleichung der Nullstellenform ein, so erhält man $f(x) = a \cdot (x+3) \cdot (x-6)$. Wird zusätzlich der Punkt $(2 \mid 5)$ eingesetzt, so entsteht die Gleichung $5 = a \cdot (2+3) \cdot (2-6)$, deren Lösung $a = -\frac{1}{4}$ lautet. Somit ist die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{4} \cdot (x+3) \cdot (x-6)$. □

5.3 Ordinatenabschnitt und zwei weitere Punkte

Ist der Ordinatenabschnitt gegeben, so ist bereits der Parameter c der Polynomform bekannt. Setzt man die Koordinaten der beiden Punkte ebenfalls in die Polynomform ein, so entsteht ein lineares Gleichungssystem mit den beiden Unbekannten a und b, welche auf diese Weise berechnet werden können.

Beispiel: *Eine quadratische Funktion besitzt den Ordinatenabschnitt* 3*. Außerdem verläuft der Funktionsgraph durch die beiden Punkte* $(2 \mid 5)$ *und* $(10 \mid 8)$*. Es soll anhand dieser Daten die Funktionsgleichung ermittelt werden.*

Der Ordinatenabschnitt entspricht dem Parameter c der Polynomform. Setzt man ihn in die Grundgleichung der Polynomform ein, so erhält man $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 3$. Werden als nächstes die Koordinaten der beiden Punkte eingesetzt, so entstehen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 5 &= a \cdot 4 + b \cdot 2 + 3 \\ 8 &= a \cdot 100 + b \cdot 10 + 3 \end{aligned}$$

Durch Lösen dieses linearen Gleichungssystems erhält man $a = -\frac{1}{16}$ und $b = \frac{9}{8}$. Somit lautet die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{16}\,x^2 + \frac{9}{8}\,x + 3$. □

5.4 Drei Punkte

Die Lösung dieses Falls erfordert den größten Rechenaufwand. Es werden die Koordinaten der drei Punkte in die Grundgleichung der Polynomform eingesetzt. Dadurch entsteht ein lineares Gleichungssystem mit den drei Unbekannten a, b und c, welche auf diese Weise berechnet werden können.

Beispiel: *Der Funktionsgraph einer quadratischen Funktion verläuft durch die drei Punkte* $(-3 \mid 5)$, $(1 \mid 2)$ *und* $(5 \mid 7)$. *Es soll anhand dieser Daten die Funktionsgleichung ermittelt werden.*

Es werden – ähnlich wie im Beispiel von Kapitel 5.3 – die Koordinaten aller Punkte in die Grundgleichung der Polynomform eingesetzt. Man erhält folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}5 &= a \cdot 9 - b \cdot 3 + c\\ 2 &= a \cdot 1 + b \cdot 1 + c\\ 7 &= a \cdot 25 + b \cdot 5 + c\end{aligned}$$

Zu beachten sind die unterschiedlichen Vorzeichen in der ersten Gleichung, welche auf die negative x-Koordinate zurückgehen. Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ und $c = 2$. Die gesuchte Funktionsgleichung ist daher $f(x) = \frac{1}{4}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x + 2$. □

6 Anwendungsgebiete und ausgewählte Aufgaben

Quadratische Funktionen kommen u. a. in Folgenden Bereichen zum Einsatz:

– Physik: Flugkurven sind unter Vernachlässigung des Luftwiderstands parabelförmig. Außerdem kann der zurückgelegte Weg bei gleichmäßiger Beschleunigung ebenfalls durch eine quadratische Funktion beschrieben werden.

– Architektur: Zahlreiche Gebäude und Strukturen sind zumindest näherungsweise parabelförmig (z. B. Brückenbögen, Hängebrücken, Hallendächer und Eingangstore).

– Wirtschaft: Beispielsweise werden quadratische Funktionen häufig verwendet, um den Gewinn oder die Kosten eines Produktionsprozesses zu beschreiben.

Nachfolgend werden einige ausgewählte Beispiele zu den oben genannten Anwendungsgebieten vorgestellt.

Beispiel: *Beim Kugelstoßtraining wurde die Flugbahn des besten Versuchs analysiert. Die Höhe der Kugel kann durch die Funktion* $h(x) = -0{,}08x^2 + 0{,}92x + 1{,}95$ *beschrieben werden, wobei sowohl* x *als auch* $h(x)$ *in Metern gemessen werden. Die Variable* x *steht für die Entfernung von der Abwurfstelle.*

a) Es soll die Abwurfhöhe ermittelt werden.

b) Es soll berechnet werden, in welcher Entfernung die Kugel landete.

c) Es soll der höchste Punkt der Flugbahn berechnet werden.

Die Abwurfhöhe entspricht dem Ordinatenabschnitt. Sie kann daher direkt aus der Funktionsgleichung abgelesen werden und entspricht 1,95 m.

Die Landestelle entspricht einer der beiden Nullstellen. Diese werden gemäß Kapitel 3.1 ermittelt und lauten $x_1 \approx -1{,}83$ und $x_2 \approx 13{,}33$. Da das negative Resultat in diesem Zusammenhang keine Bedeutung hat, ist die Kugel in einer Entfernung von ca. 13,33 m gelandet.

Der höchste Punkt entspricht dem Scheitelpunkt. Dessen x-Koordinate liegt daher in der Mitte der beiden Nullstelen, also bei $x_S = \frac{-1{,}83+13{,}33}{2} = 5{,}75$. Die y-Koordinate ist $h(5{,}75) = 4{,}595$. Somit erreichte die Kugel 5,75 m nach der Abwurfstelle die Maximalhöhe von 4,595 m. □

Beispiel: *Es soll eine Bogenbrücke errichtet werden, wobei die Form des Brückenbogens dem Funktionsgraphen einer quadratischen Funktion entspricht. Zwischen den beiden Stellen, an denen der Brückenbogen die Straße schneidet, liegen 90 m. Die höchste Stelle des Brückenbogens befindet sich 7,5 m oberhalb der Straße.*

a) Es soll die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ermittelt werden, welche die Form des Brückenbogens beschreibt.

b) Um den Brückenbogen zu stützen, sollen zwei Pfeiler errichtet werden, welche die Spannweite von 90 m in drei gleich große Bereiche teilen. Die Höhe dieser Pfeiler soll berechnet werden.

Da es keine Vorgaben für das Koordinatensystem gibt, kann dieses so gewählt werden, dass die Berechnungen möglichst einfach sind. Der Ursprung des Koordinatensystems wird daher an den linken Schnittpunkt des Brückenbogens mit der Straße gelegt. Somit befinden sich die beiden Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 90$. Der Scheitelpunkt befindet sich bei $(45 \mid 7{,}5)$, da sich dieser in der Mitte der beiden Nullstellen befindet.

Da man sowohl den Scheitelpunkt als auch beide Nullstellen kennt, kann man die Funktionsgleichung entweder gemäß Kapitel 5.1 oder gemäß Kapitel 5.2 berechnen. Hier wird die Vorgehensweise von Kapitel 5.1 angewendet. Setzt man die Koordinaten des Scheitelpunkts in die Grundgleichung der Scheitelpunktform ein, so erhält man $f(x) = a \cdot (x - 45)^2 + 7{,}5$. Nun werden noch die Koordinaten eines weiteren Punktes eingesetzt, um den Parameter a zu berechnen. Dafür stehen zwei Punkte, nämlich die beiden Nullstellen, zur Auswahl. Es wird aufgrund der leichteren Rechnung der Punkt $(0 \mid 0)$ verwendet. Man erhält die Gleichung $0 = a \cdot (0 - 45)^2 + 7{,}5$, deren Lösung $a = -\frac{1}{270}$ lautet. Somit lautet die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{270} \cdot (x - 45)^2 + 7{,}5$.

Der erste Pfeiler befindet sich nach einem Drittel der Spannweite, also nach 30 m und der zweite Pfeiler nach zwei Drittel der Spannweite, also nach 60 m. Die Höhe der beiden Pfeiler muss aufgrund der Symmetrie der Parabel gleich sein, weshalb man nur einen der beiden Werte in die Funktionsgleichung einsetzen muss. Man erhält $f(30) = \frac{20}{3} = 6{,}\overline{6}$. Somit müssen die Pfeiler ca. 6,67 m hoch sein. □

Beispiel: *Die Analyse eines Produktionsprozesses ergab Folgendes: Die Fixkosten betragen 2800 €. Werden 1500 Stück produziert und anschließend verkauft, so beträgt der Gewinn 1800 €. Werden 3500 Stück produziert und anschließend verkauft, so beträgt der Gewinn 2100 €.*

a) Es soll die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ermittelt werden, welche den Gewinn in Abhängigkeit von der Stückzahl beschreibt.

b) Es soll die Gewinnzone ermittelt werden, also jener Bereich, für welchen der Gewinn positiv ist.

c) Es soll der Maximalgewinn und die zugehörige Stückzahl berechnet werden.

Es sind der Ordinatenabschnitt (in Form der Fixkosten) sowie zwei weitere Punkte der Gewinnfunktion bekannt. Zu beachten ist hier, dass die Fixkosten einen negativen Gewinn darstellen. Somit kann man in die Grundgleichung der Polynomform $c = -2800$ einsetzen. Setzt man die beiden anderen Punkte $(1500 \mid 1800)$ und $(3500 \mid 2100)$ ein, so entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$1800 = a \cdot 1500^2 + b \cdot 1500 - 2800$$
$$2100 = a \cdot 3500^2 + b \cdot 3500 - 2800$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist $a = -\frac{1}{1200}$ und $b = \frac{259}{60}$. Somit lautet die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion $G(x) = -\frac{1}{1200}\,x^2 + \frac{259}{60}\,x - 2800$.

Um die Gewinnzone zu ermitteln, müssen gemäß Kapitel 3.1 die beiden Nullstellen berechnet werden. Man erhält die beiden Werte $x_1 \approx 760{,}22$ und $x_2 \approx 4419{,}78$. Unabhängig von den üblichen Rundungsregeln muss bei diesem Aufgabentyp immer zur Mitte der beiden Nullstellen gerundet werden, da dort der Gewinn positiv ist. Würde man in die andere Richtung runden, so würde bei der entsprechenden Stückzahl bereits ein Verlust vorliegen. Somit beginnt die Gewinnzone mit dem sogenannten Break-Even-Point bei 761 Stück und endet mit der oberen Gewinngrenze bei 4419 Stück.

Der Maximalgewinn entspricht dem Scheitelpunkt. Da man die beiden Nullstellen kennt, kann man die x-Koordinate des Scheitelpunkts gemäß Kapitel 4.2 berechnen:

$$x_S = \frac{760{,}22 + 4419{,}78}{2} = 2590$$

Die y-Koordinate erhält man durch Einsetzen von $x = 2590$ in die Funktionsgleichung: $G(2590) \approx 2790{,}08$. Somit beträgt der Maximalgewinn ca. 2790,08 € und wird bei 2590 Stück erzielt. □