Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind jene Zahlen, die man zum Zählen verwendet. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{N}$ abgekürzt. Laut ÖNORM ist sie definiert durch $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$. Möchte man die Null ausschließen, so schreibt man $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ oder $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

In der „echten" Mathematik ist es meistens genau umgekehrt: Hier ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Um die Null miteinzubeziehen, verwendet man das Symbol $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

1 Teilbarkeit

Eine natürliche Zahl a nennt man teilbar durch eine natürliche Zahl $b \neq 0$, wenn die Division $a : b$ den Rest null ergibt. Es gibt also eine weitere natürliche Zahl n, sodass $b \cdot n = a$ gilt.

Symbolisch schreibt man $b \mid a$, was soviel wie „b teilt a" bedeutet. Ist a nicht teilbar durch b, so schreibt man $b \nmid a$.

1.1 Allgemeine Eigenschaften

Jede natürliche Zahl $a \geq 1$ ist durch 1 und a teilbar.

Herleitung: Wenn a durch 1 teilbar ist, dann muss es gemäß der obigen Definition eine natürliche Zahl n geben, sodass $1 \cdot n = a$ ergibt. Setzt man für n die Zahl a ein, so erhält man $1 \cdot a = a$, wodurch die Aussage bestätigt wäre. Genauso ist a durch a teilbar, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, sodass $a \cdot n = a$ gilt. Setzt man $n = 1$ ein, so erhält man $a \cdot 1 = a$, womit auch diese Aussage bestätigt ist. ■

Die Zahl 0 ist durch jede natürliche Zahl ungleich 0 teilbar.

Herleitung: Dafür setzt man für n die Zahl 0 ein. Es gilt dann für alle $b \in \mathbb{N}$ die Gleichung $b \cdot 0 = 0$, wodurch die Aussage bestätigt wäre. ■

Aus $a \mid b$ und $b \mid c$ folgt $a \mid c$. Man spricht von der sogenannten Transitivität der Teilbarkeit.

Herleitung: Gilt $a \mid b$, dann gibt es ein n_1, sodass $a \cdot n_1 = b$ gilt. Andererseits gibt es bei $b \mid c$ ein n_2 für welches $b \cdot n_2 = c$ gilt. Setzt man nun für b den Term $a \cdot n_1$ ein, so erhält man insgesamt $a \cdot n_1 \cdot n_2 = c$. Es gibt also eine natürliche Zahl n, nämlich $n = n_1 \cdot n_2$, für welche $a \cdot n = c$ erfüllt ist. Daher gilt $a \mid c$. ■

Beispiel: *Es soll überprüft werden, ob 35 000 durch 7 teilbar ist.*

Man sollte wissen, dass 35 durch 7 teilbar ist. Außerdem ist es nicht schwierig, zu erkennen, dass 35 000 durch 35 teilbar ist. Aus der oben beschrieben Transitivität folgt daher, dass 35 000 auch durch 7 teilbar ist. □

Gilt $a \mid n$ und $a \mid m$, so gilt auch $a \mid (n \pm m)$.

Beispiel: *Es soll überprüft werden, ob 156 durch 13 teilbar ist.*

Man kann 156 zerlegen in $130 + 26$. Da man weiß, dass 130 durch 13 teilbar ist und auch 26 durch 13 teilbar ist, folgt aus der oben genannten Eigenschaft, dass 156 ebenfalls durch 13 teilbar ist. □

1.2 Teilbarkeitsregeln

Zunächst sollten zwei Begriffe behandelt werden: Die Ziffernsumme bzw. Quersumme einer natürlichen Zahl berechnet man, indem man alle Ziffern addiert. Die alternierende Ziffernsumme bildet man, indem man die Ziffern abwechselnd addiert und subtrahiert. Am Ende wird der Betrag gebildet, d. h. dass ein negatives Ergebnis gegebenenfalls positiv gemacht wird.

Beispiel: *Es sollen die Ziffernsumme und die alternierende Ziffernsumme von 94 248 berechnet werden.*

Die Ziffernsumme erhält man durch Addition der einzelnen Ziffern: $9 + 4 + 2 + 4 + 8 = 27$.

Für die alternierende Ziffernsumme werden abwechselnd positive und negative Vorzeichen verwendet. Wenn die erste Ziffer positiv gewertet wird, muss danach ein Minus folgen: $9 - 4 + 2 - 4 + 8 = 11$. □

Mit den folgenden Teilbarkeitsregeln kann relativ schnell überprüft werden, ob eine vorgegebene Zahl durch eine der nachfolgenden Zahlen teilbar ist.

2	Die Zahl ist gerade, d. h. die letzte Ziffer ist 0, 2, 4, 6 oder 8.
3	Die Ziffernsumme ist durch 3 teilbar.
4	Die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl ist durch 4 teilbar.
5	Die letzte Ziffer lautet 0 oder 5.
6	Die Zahl ist durch 2 und durch 3 teilbar.
8	Die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl ist durch 8 teilbar.
9	Die Ziffernsumme ist durch 9 teilbar.
10	Die letzte Ziffer lautet 0.
11	Die alternierende Ziffernsumme ist durch 11 teilbar.

2 Primzahlen

Eine besondere Teilmenge der natürlichen Zahlen stellen die Primzahlen dar. Schon in der Antike übten sie einen großen Reiz auf die Gelehrten aus, und auch heute gibt es noch zahlreiche ungelöste Fragen im Zusammenhang mit Primzahlen. Eine wichtige Einsatzmöglichkeit sind diverse Verschlüsselungsverfahren, weshalb die Erforschung der Primzahlen auch einen realen Nutzen hat.

Eine mögliche Definition von Primzahlen lautet folgendermaßen: Jede natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat, ist eine Primzahl. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass 0 keine Primzahl ist, da sie unendlich viele Teiler hat, und dass 1 keine Primzahl ist, da sie nur einen Teiler hat.

Die ersten Primzahlen lauten folgendermaßen:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...$$

Bereits bei relativ kleinen Zahlen wie etwa 571, 1001 oder 1993 ist es schwierig, festzustellen, ob es sich um eine Primzahl handelt. Es wird nun ein allgemeines Verfahren vorgestellt, mit dem überprüft werden kann, ob eine natürliche Zahl n eine Primzahl ist.

1. Es wird die Wurzel der zu überprüfenden Zahl berechnet, also $\sqrt{n}$.
2. Alle Primzahlen, die kleiner oder gleich dieser Wurzel sind, werden aufgeschrieben.
3. Wenn die Zahl n durch keine dieser Zahlen teilbar ist, ist sie eine Primzahl.

Die im dritten Schritt zu berechnenden Teilbarkeiten werden entweder mithilfe der Teilbarkeitsregeln überprüft, oder indem man die Division durchführt (handschriftlich bzw. mit dem Taschenrechner). Bleibt kein Rest, so ist die Zahl teilbar.

Herleitung: Es wird an dieser Stelle begründet, warum man abbrechen kann, sobald man $\sqrt{n}$ erreicht hat:

Damit eine natürliche Zahl n keine Primzahl ist, muss es zwei natürliche Zahlen a und b geben, sodass $a \cdot b = n$ gilt. Ist eine der beiden Zahlen größer als $\sqrt{n}$, so muss die andere Zahl kleiner als $\sqrt{n}$ sein, da sonst $a \cdot b > n$ wäre.

Für den Fall, dass $\sqrt{n}$ selbst eine natürliche Zahl ist, ist ohnehin sichergestellt, dass n keine Primzahl ist, da sie dann den Teiler $\sqrt{n}$ besitzt. ■

Beispiel: *Es soll überprüft werden, ob 1993 eine Primzahl ist.*

Bevor man das obige Verfahren anwendet, sollte man mit den einfachen Teilbarkeitsregeln überprüfen, ob eventuell dadurch schon eine Entscheidung getroffen werden kann. Da die letzte Ziffer nicht 0, 2, 4, 5, 6 oder 8 ist, fallen bereits sehr viele Teilbarkeiten weg. Die Ziffernsumme 22 ist nicht durch 3 teilbar (und somit auch nicht durch 9) und die alternierende Ziffernsumme 2 ist nicht durch 11 teilbar. Es muss daher das obige Verfahren angewendet werden.

Die Wurzel von 1993 beträgt ungefähr 44,63. Daher müssen alle Primzahlen bis 44 überprüft werden. Das sind 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 und 43. Es wird nun 1993 durch all diese Zahlen dividiert. Bleibt irgendwo kein Rest, so hat man einen Teiler gefunden. Da sich aber herausstellt, dass die Division immer zu Nachkommastellen führt, ist 1993 eine Primzahl. □

Der Satz von Euklid besagt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

3 Primfaktorzerlegung

Unter der Primfaktorzerlegung versteht man, dass jede natürliche Zahl größer als 1 in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden kann, welches bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.

Um die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl zu bestimmen, dividiert man diese so lange durch Primzahlen, bis man bei der Zahl 1 angelangt ist. Es ist dabei sinnvoll, beginnend bei der kleinsten Primzahl, der Reihe nach alle Primzahlen so oft zu verwenden, bis die Division nicht mehr ohne Rest möglich ist. Häufig wird der Fehler gemacht, dass auch durch Zahlen wie 4 oder 9 dividiert wird, welche keine Primzahlen sind.

Beispiel: *Es soll die Primfaktorzerlegung von 990 bestimmt werden.*

Dazu wird die Zahl 990 schrittweise durch Primzahlen dividiert, bis 1 übrig bleibt.

$$\begin{array}{r|l} 990 & 2 \\ 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

Die Primfaktorzerlegung der Zahl 990 ist daher $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. □

4 GGT und KGV

Der größte gemeinsame Teiler von zwei oder mehr natürlichen Zahlen ist die größte natürliche Zahl, die alle vorgegebenen Zahlen teilt. Man kürzt ihn oft mit GGT ab. Analog dazu ist das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei oder mehr natürlichen Zahlen die kleinste natürliche Zahl, die durch alle vorgegebenen Zahlen teilbar ist. Man kürzt es oft mit KGV ab.

Um den GGT und das KGV zu berechnen, kann man folgende Vorgehensweise befolgen:

1. Es wird die Primfaktorzerlegung aller beteiligten Zahlen bestimmt.
2. Für den GGT kommen nur Primfaktoren in Frage, welche in jeder Zahl enthalten sind. Man verwendet für jeden Primfaktor jeweils die kleinste vorkommende Hochzahl.

3. Für das KGV verwendet man die größte Hochzahl jedes Primfaktors. Hier genügt es, wenn die Primzahl in einer der Zahlen enthalten ist.

Beispiel: *Es sollen der GGT und das KGV der Zahlen 24, 36 und 66 bestimmt werden.*

Dazu benötigt man zunächst die Primfaktorzerlegungen. Diese lauten folgendermaßen:

$$24 = 2^3 \cdot 3 \qquad 36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Für den GGT verwendet man die Faktoren 2 und 3 jeweils ohne Hochzahl. Der Faktor 11 wird überhaupt nicht verwendet, da er nicht in jeder Zahl enthalten ist. Der GGT lautet somit $2 \cdot 3 = 6$.

Für das KGV verwendet man die Faktoren 2^3, 3^2 und 11. Als Ergebnis erhält man für das KGV der vorgegebenen Zahlen 792. □

Man nennt zwei Zahlen teilerfremd, wenn sie außer 1 keinen gemeinsamen Teiler besitzen, d. h. ihr größter gemeinsamer Teiler ist 1. Es gelten die folgenden beiden Eigenschaften:

– Zwei unterschiedliche Primzahlen sind immer teilerfremd.

– Zwei aufeinanderfolgende Zahlen sind immer teilerfremd.

Herleitung: Dass unterschiedliche Primzahlen teilerfremd sind ist klar, da deren einziger und somit auch größter gemeinsamer Teiler 1 ist.

Die zweite Eigenschaft kann folgendermaßen begründet werden: Angenommen, die Zahl k ist ein gemeinsamer Teiler der aufeinanderfolgenden Zahlen n und $n + 1$, also $k \mid n$ und $k \mid (n + 1)$. Dann muss die Zahl k aufgrund der vierten Eigenschaft von Abschnitt 1.1 auch deren Differenz (also die Zahl 1) teilen. Die einzige Zahl, die 1 teilt, ist 1 selbst. Daher ist der größte gemeinsame Teiler von zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Zahlen n und $n + 1$ die Zahl 1. ■

Abschließend wird noch ein nützlicher Zusammenhang zwischen GGT und KGV vorgestellt: Für zwei beliebige positive natürliche Zahlen a und b gilt $\mathrm{GGT}(a, b) \cdot \mathrm{KGV}(a, b) = a \cdot b$. Kennt man entweder GGT oder KGV, dann kann man die andere Größe durch diesen Zusammenhang berechnen.

Beispiel: *Es ist bekannt, dass GGT$(3288,\ 7224) = 24$ ist. Es soll das KGV dieser Zahlen berechnet werden.*

Durch Umformen des soeben beschriebenen Zusammenhangs erhält man folgendes Resultat:

$$\text{KGV}(3288,\ 7224) = \frac{3288 \cdot 7224}{24} = 989\,688$$

□

5 Besondere Eigenschaften

Das gesamte Kapitel „Besondere Eigenschaften“ ist für die sRDP nicht relevant.

Obwohl sich bereits die Gelehrten der Antike mit den Eigenschaften natürlicher Zahlen beschäftigten, gibt es noch immer zahlreiche ungelöste Fragen (speziell im Zusammenhang mit Primzahlen). In diesem Kapitel werden einige spezielle Begriffe bzw. bisher ungelöste Fragestellungen vorgestellt.

5.1 Pythagoreische Tripel

Unter einem pythagoreischen Tripel versteht man drei positive natürliche Zahlen a, b und c, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beispiele für pythagoreische Tripel sind $(3, 4, 5)$ und $(5, 12, 13)$, denn es gilt $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$ und $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$.

5.2 Der große Satz von Fermat

Der große Satz von Fermat besagt, dass es für $n > 2$ keine drei positiven natürlichen Zahlen gibt, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$a^n + b^n = c^n$$

Obwohl dieser Satz bereits im 17. Jahrhundert formuliert wurde, konnte er erst im Jahr 1994 vom britischen Mathematiker Andrew Wiles endgültig bewiesen werden.

5.3 Die starke Goldbachsche Vermutung

Als starke Goldbachsche Vermutung bezeichnet man die Fragestellung, ob jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden kann (diese müssen nicht unbedingt verschieden sein). Diese Frage beschäftigt Mathematiker spätestens seit dem 7. Juni 1742, als Christian Goldbach einen Brief an Leonhard Euler verfasste, welcher u. a. diese Fragestellung beinhaltete. Da in über 270 Jahren kein Gegenbeispiel gefunden wurde, ist es gut möglich, dass es auch keines gibt. Es ist jedoch bisher niemandem gelungen, zu beweisen, dass diese Vermutlich tatsächlich allgemeingültig ist. Kurzzeitig wurde sogar ein Preisgeld von einer Million Dollar auf einen korrekten Beweis ausgesetzt.

Beispiel: *Es soll die starke Goldbachsche Vermutung für die Zahl 100 bestätigt werden.*

Es gilt $17+83 = 100$ wodurch die starke Goldbachsche Vermutung für die Zahl 100 bestätigt ist. Oftmals gibt es sogar mehr als nur eine mögliche Summe zweier Primzahlen. Beispielsweise könnte man auch $11 + 89 = 100$ und $29 + 71 = 100$ verwenden. □

5.4 Die schwache Goldbachsche Vermutung

Analog zur oben beschriebenen starken Goldbachschen Vermutung besagt die schwache Goldbachsche Vermutung, dass jede ungerade Zahl, die größer als 5 ist, als Summe von drei Primzahlen geschrieben werden kann. Es spielt dabei keine Rolle, ob eine Primzahl öfter als einmal vorkommt.

Beispiel: *Es soll die schwache Goldbachsche Vermutung für die Zahl 25 bestätigt werden.*

Es gilt $3+3+19 = 25$ wodurch die schwache Goldbachsche Vermutung für die Zahl 25 bestätigt ist. Auch hier gibt es mehrere Möglichkeiten, wie etwa $7 + 7 + 11 = 25$ oder $5 + 7 + 13 = 25$. □