Logarithmus

Als Einstieg in diesen Themenbereich ist folgende Frage passend: Welche Hochzahl x wird benötigt, damit das Ergebnis von 10^x der Zahl 50 entspricht? Man kann mit Sicherheit sagen, dass die gesuchte Zahl zwischen 1 und 2 liegt, denn $10^1 = 10$ und $10^2 = 100$. Möchte man x genauer bestimmen, so kann man dies durch geschicktes Ausprobieren erreichen, indem man beispielsweise jeweils die Mitte des aktuell bestimmten Bereichs verwendet. Eine einfachere Möglichkeit bieten die Logarithmus-Tasten am Taschenrechner. Was sich hinter diesen Tasten verbirgt, wird in diesem Skriptum erläutert.

1 Die Eulersche Zahl

Die Eulersche Zahl e ist eine wichtige mathematische Konstante. Sie hat ungefähr denselben Stellenwert wie die Kreiszahl π. Es handelt dabei ebenfalls um eine irrationale Zahl. Die Definition dieser Zahl lautet folgendermaßen:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... \approx 2{,}71828\,18284\,59045\,23536$$

Im Vergleich zur Zahl π kann man sich aufgrund der Regelmäßigkeit am Beginn dieser Zahl relativ leicht die ersten neun Nachkommastellen merken.

2 Begriffsdefinitionen

Es sind die beiden positiven reellen Zahlen a und b gegeben. Der Logarithmus $\log_a(b)$ entspricht jener Zahl x, für welche die Gleichung $a^x = b$ erfüllt ist. Der Logarithmus beantwortet also die Frage, welche Hochzahl verwendet werden muss, um aus einer bestimmten Basis a die Zahl b zu erhalten. Man bezeichnet $\log_a(b)$ als Logarithmus von b zur Basis a. Die Zahl b nennt man Numerus. Der Plural von Numerus ist Numeri.

Da bestimmte Basen in sehr vielen Anwendungsszenarien vorkommen, haben sich hierfür spezielle Bezeichnungen durchgesetzt. Häufig gibt es für diese Logarithmen eigene Tasten am Taschenrechner bzw. eigene Befehle bei Computerprogrammen.

- **Natürlicher Logarithmus:** Dieser Logarithmus verwendet als Basis die Eulersche Zahl e. Er wird häufig in den Naturwissenschaften verwendet, ist jedoch auch in der Mathematik der Standardlogarithmus. Oftmals wird für den natürliche Logarithmus die Abkürzung `LN` verwendet. Viele Programme (welche nur diesen Logarithmus anbieten) verwenden jedoch die Abkürzung `LOG`. Das ist insofern problematisch, da diese Abkürzung auch für den nachfolgend beschriebenen dekadischen Logarithmus gebräuchlich ist. Außerdem verwendet man die Bezeichnung `LOG` auch, um Aussagen zu formulieren, welche unabhängig von der Basis sind.
- **Dekadischer Logarithmus:** Dieser Logarithmus verwendet die Basis 10 und wird daher auch häufig als „Zehnerlogarithmus“ bezeichnet. Am Taschenrechner und bei Computerprogrammen wird dafür meistens die Abkürzung `LG` bzw. seltener die Abkürzung `LOG` verwendet (wobei letzteres aus den oben beschriebenen Gründen problematisch ist).
- **Binärer Logarithmus:** Der binäre Logarithmus verwendet die Basis 2 und ist u. a. in der Informatik von größerer Bedeutung. Gebräuchliche Abkürzungen sind `LB` bzw. `LD` (für dualer Logarithmus).

3 Rechenregeln für Logarithmen

Nachfolgend werden die Rechenregeln für Logarithmen erläutert und hergeleitet. Diese Regeln gelten für jede beliebige Basis und somit auch für die drei im vorherigen Kapitel beschriebenen speziellen Logarithmen. Es dürfen jedoch nicht verschiedene Basen gemischt werden.

3.1 Allgemeine Eigenschaften

Gemäß der Definition des Logarithmus ist $\log_a(b)$ die Lösung der Gleichung $a^x = b$. Daraus lassen sich einige allgemeine Eigenschaften ableiten:

- $\log_a(a) = 1,$ weil $a^1 = a$
- $\log_a(1) = 0,$ weil $a^0 = 1$
- $\log_a(\frac{1}{a}) = -1,$ weil $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Außerdem heben sich Potenz und Logarithmus auf, wenn die Basis gleich ist. Es gelten daher die folgenden beiden Eigenschaften:

$$\log_a(a^x) = x \qquad\qquad a^{\log_a(b)} = b$$

3.2 Logarithmus eines Produktes

Ist der Numerus eines Logarithmus ein Produkt, so kann man den Logarithmus folgendermaßen zerlegen:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Man kann diese Eigenschaft gut anhand des nachfolgenden Zahlenbeispiels veranschaulichen:

$$\log_2(16 \cdot 8) = \log_2(16) + \log_2(8)$$
$$\log_2\left(2^7\right) = \log_2\left(2^4\right) + \log_2\left(2^3\right)$$
$$7 = 4 + 3$$

Im ersten Schritt wurde der Numerus als Zweierpotenz dargestellt. Anschließend wurde die Tatsache verwendet, dass der Logarithmus der erforderlichen Hochzahl entspricht. Da eine wahre Aussage resultierte, wurde die genannte Eigenschaft für dieses Beispiel nachgewiesen. Nachfolgend wird außerdem eine allgemeingültige jedoch eher abstrakte Herleitung vorgestellt.

Herleitung: Es werden die Variablen v und w definiert durch $v = \log_a(x)$ und $w = \log_a(y)$, wobei a eine beliebige positive Basis ist. Diese Gleichungen sind gemäß der Definition des Logarithmus gleichbedeutend zu $x = a^v$ und $y = a^w$.

Somit erhält man $x \cdot y = a^v \cdot a^w = a^{v+w}$. Aus der Gleichung $x \cdot y = a^{v+w}$ folgt gemäß der Definition des Logarithmus wiederum $v + w = \log_a(x \cdot y)$. Setzt man nun für v und w die Ausdrücke aus der ersten Zeile ein, so folgt die zu zeigende Eigenschaft $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y)$. ■

3.3 Logarithmus eines Quotienten

Ist der Numerus eines Logarithmus ein Quotient, so kann man den Logarithmus folgendermaßen zerlegen:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log(y).$$

Auch diese Eigenschaft wird nachfolgend anhand eines Zahlenbeispiels veranschaulicht:

$$\lg\left(\tfrac{100}{0{,}1}\right) = \lg(100) - \lg(0{,}1)$$
$$\lg\left(10^3\right) = \lg\left(10^2\right) - \lg\left(10^{-1}\right)$$
$$3 = 2 - (-1)$$

Herleitung: Die allgemeingültige Herleitung dieser Regel erfolgt genauso wie jene der vorherigen Regel. Der einzige Unterschied ist, dass $\frac{x}{y} = \frac{a^v}{a^w} = a^{v-w}$ ergibt, wodurch sich anstelle des Plus ein Minus ergibt. ■

3.4 Logarithmus einer Potenz

Ist der Numerus eines Logarithmus eine Potenz, so gilt folgende Eigenschaft:

$$\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x).$$

Herleitung: Die Potenz x^n eine Abkürzung für $x \cdot x \cdot x \cdots x$, wobei es insgesamt n Faktoren gibt. Daher folgt aus der Logarithmusregel für Produkte

$$\log_a(x^n) = \log_a(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n\text{-mal}}) = \underbrace{\log_a(x) + \log_a(x) + ... + \log_a(x)}_{n\text{-mal}} = n \cdot \log_a(x).$$

■

Beispiel: *Der folgende Term soll durch einfachste Numeri dargestellt werden. Das bedeutet, dass die Terme innerhalb der Logarithmen so klein wie möglich sein sollen.*

$$\ln\left(\frac{3x}{yz^2}\right)$$

Im ersten Schritt kann der Quotient innerhalb des Logarithmus durch eine Differenz zweier Logarithmen dargestellt werden:

$$\ln(3x) - \ln\left(yz^2\right)$$

Als Nächstes können die Produkte innerhalb der Logarithmen jeweils durch eine Summe zweier Logarithmen dargestellt werden. Dabei ist die Klammer bei der zweiten Summe zu beachten:

$$\ln(3) + \ln(x) - \left(\ln(y) + \ln\left(z^2\right)\right) = \ln(3) + \ln(x) - \ln(y) - \ln\left(z^2\right)$$

Zuletzt wird bei der Potenz im letzten Logarithmus die Hochzahl vor den Logarithmus geschrieben. Das Endergebnis lautet somit folgendermaßen:

$$\ln(3) + \ln(x) - \ln(y) - 2 \cdot \ln(z)$$

□

3.5 Logarithmus des Kehrwertes

Für den Kehrwert des Numerus gilt die folgende Eigenschaft:

$$\log_a\left(\tfrac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

Herleitung: Aus der Rechenregel für Quotienten ist bekannt, dass $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(1) - \log_a(x)$ gilt. Da $\log_a(1)$ laut Abschnitt 3.1 immer den Wert 0 hat, folgt daraus die Eigenschaft $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$. ■

3.6 Logarithmen von Summen und Differenzen

Ist der Numerus eines Logarithmus eine Summe oder eine Differenz, so kann man den Logarithmus nicht zerlegen. Die Terme $\log_a(x+y)$ und $\log_a(x-y)$ sind beispielsweise nicht zerlegbar.

Beispiel: *Der folgende Term soll durch einfachste Numeri dargestellt werden.*

$$\lg\left(\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}\right)$$

Im ersten Schritt sollte man erkennen, dass im Nenner eine binomische Formel angewendet werden kann, was zu folgendem Term führt:

$$\lg\left(\frac{(x-y)^2}{(x+y)\cdot(x-y)}\right)=\lg\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

Abschließend wird der Logarithmus des Quotienten in eine Differenz zweier Logarithmen zerlegt:

$$\lg(x-y)-\lg(x+y)$$

Da Logarithmen von Summen und Differenzen nicht zerlegt werden können, handelt es sich dabei um eine Darstellung durch einfachste Numeri. □

3.7 Basisumrechnung

Viele Taschenrechner besitzen keine Taste mit welcher Logarithmen mit beliebiger Basis berechnet werden können sondern nur eine Taste für den dekadischen und den natürlichen Logarithmus. Mit folgender Rechenregel ist es möglich, mit einem einzigen Logarithmus (z. B. dem natürlichen Logarithmus) die Werte von Logarithmen mit beliebiger Basis zu berechnen:

$$\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}=\frac{\lg(x)}{\lg(a)}=\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}=...$$

Es wird somit der Logarithmus des vorgegebenen Numerus durch den Logarithmus der vorgegebenen Basis dividiert, wobei hierfür jeder beliebige zur Verfügung stehende Logarithmus verwendet werden kann.

Herleitung: Die Variable y wird definiert als $y=\log_a(x)$. Dies ist aufgrund der Definition des Logarithmus gleichwertig zu $x=a^y$. Ist b die Basis eines zur Verfügung stehenden Logarithmus, so gilt folgende Umformung:

$$\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}=\frac{\log_b(a^y)}{\log_b(a)}=\frac{y\cdot\log_b(a)}{\log_b(a)}=y=\log_a(x).$$

■

Beispiel: *Es soll* $\log_5(20)$ *unter Verwendung des natürlichen Logarithmus berechnet werden*

Durch Einsetzen in die oben beschriebene Formel erhält man folgendes Resultat:

$$\log_5(20)=\frac{\ln(20)}{\ln(5)}\approx 1{,}861$$

□

4 Exponentialgleichungen

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichungen, bei welcher die gesuchte Variable im Exponenten einer Potenz steht. In vielen Fällen sind derartige Gleichungen nicht algebraisch zu lösen sondern können nur näherungsweise gelöst werden. Es gibt jedoch einige Lösungsstrategien, mit welchen die Lösungen einfacherer Exponentialgleichungen gefunden werden können.

4.1 Exponentenvergleich

Manchmal ist es möglich, durch geschicktes Umformen zu erreichen, dass die Basen der Potenzen gleich sind. Wenn man erreicht hat, dass die Basis auf beiden Seiten gleich ist, so muss für das Erfüllen der Gleichung nur noch der Exponent auf beiden Seiten gleich sein. Man führt daher einen sogenannten Exponentenvergleich durch, d. h. man setzt die Exponenten gleich und löst die dadurch entstehende Gleichung.

Beispiel: *Es soll die Gleichung $3^{x-5} = 3^{3x+5}$ gelöst werden.*

Da hier die Basen bereits gleich sind, werden die Exponenten gleichgesetzt. Dadurch erhält man die lineare Gleichung $x - 5 = 3x + 5$ deren Lösung $x = -5$ ist. □

Beispiel: *Es soll die Gleichung $4^{3x-1} = 2^{6x} \cdot 4^{4-2x}$ gelöst werden.*

Hier muss zunächst die Potenz 2^{6x} so umgeformt werden, dass die Basis 4 entsteht. Dies ist durch folgende Nebenrechnung möglich:

$$2^{6x} = 2^{2\cdot 3x} = \left(2^2\right)^{3x} = 4^{3x}$$

Nun können die Potenzen auf der rechten Seite zusammengefasst werden und man erhält folgende Gleichung:

$$4^{3x} \cdot 4^{4-2x} = 4^{4+x}$$

Durch den Exponentenvergleich kann man die Exponentialgleichung auf folgende lineare Gleichung $3x - 1 = 4 + x$ reduzieren. Die Lösung dieser Gleichung und somit auch der ursprünglichen Exponentialgleichung lautet $x = 2{,}5$. □

4.2 Logarithmieren

Gibt es keine einfache Möglichkeit, auf beiden Seiten dieselbe Basis zu erhalten, so kann man auf das beidseitige Logarithmieren zurückgreifen. Das funktioniert jedoch nur, wenn außerhalb der Exponenten keine Summen oder Differenzen vorkommen. Die Wahl des Logarithmus ist für das Ergebnis nicht entscheidend, kann aber die Rechnung vereinfachen.

Beispiel: *Es soll die Gleichung $5^{3+x} = 3^{2x-1}$ gelöst werden.*

Dazu wird auf beiden Seiten der gleiche Logarithmus angewendet. In diesem Beispiel wird der natürliche Logarithmus verwendet. Da die Exponenten durch das Anwenden des Logarithmus nach vorne geschrieben werden, erhält man folgende Gleichung:

$$(3 + x) \cdot \ln(5) = (2x - 1) \cdot \ln(3)$$

Es handelt sich dabei um eine lineare Gleichung. Diese kann gelöst werden, indem man alle Terme mit x auf eine Seite bringt, x heraushebt und durch die Klammer dividiert:

$$\begin{aligned}
3 \cdot \ln(5) + x \cdot \ln(5) &= 2x \cdot \ln(3) - \ln(3) \\
x \cdot \ln(5) - 2x \cdot \ln(3) &= -\ln(3) - 3 \cdot \ln(5) \\
x \cdot (\ln(5) - 2 \cdot \ln(3)) &= -\ln(3) - 3 \cdot \ln(5) \\
x &= \tfrac{-\ln(3) - 3\cdot\ln(5)}{\ln(5) - 2\cdot\ln(3)} \\
x &\approx 10{,}08346
\end{aligned}$$

Das Ergebnis von Exponentialgleichungen sollte immer möglichst genau angegebenen werden (ca. fünf Nachkommastellen), da hier bereits kleine Ungenauigkeiten dazu führen können, dass beide Seiten der Gleichung stark voneinander abweichen. □

4.3 Substitution

Kommen in einer Exponentialgleichung Summen und Differenzen außerhalb der Exponenten vor, so kann die Lösung normalerweise nur mittels Computer näherungsweise bestimmt werden. In sehr speziellen Fällen ist es jedoch auch durch einen „Trick" möglich, die Lösung zu berechnen. Dazu wird eine ganze Potenz durch eine neue Variable ersetzt (substituiert), wodurch die Exponentialgleichung beispielsweise zu einer quadratischen Gleichung wird. Kennt man die Lösung dieser neuen Gleichung, so kann man durch Rücksubstituieren die ursprünglich gesuchte Variable bestimmen.

Beispiel: *Es soll die Gleichung* $3 \cdot 4^x - 21 \cdot 2^x + 30 = 0$ *gelöst werden.*

Um die Substitutionsmethode anwenden zu können, muss man erkennen, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$$

Man kann die Potenz 2^x dann durch eine neue Variable y ersetzen, wodurch man folgende Gleichung erhält:

$$3y^2 - 21y + 30 = 0$$

Anstelle einer Exponentialgleichung handelt es sich hierbei um eine quadratische Gleichung, deren Lösungen $y_1 = 2$ und $y_2 = 5$ lauten. Mit diesen beiden Resultaten werden durch Rücksubstitution die Lösungen der ursprünglichen Exponentialgleichung bestimmt. Dazu werden in die Gleichung $y = 2^x$ für y die beiden Lösungen eingesetzt:

$$2 = 2^x \Rightarrow \ln(2) = x \cdot \ln(2) \Rightarrow x = 1$$
$$5 = 2^x \Rightarrow \ln(5) = x \cdot \ln(2) \Rightarrow x = \tfrac{\ln(5)}{\ln(2)} \approx 2{,}32192$$

Die Lösungen der ursprünglichen Exponentialgleichung sind somit $x_1 = 1$ und $x_2 = \frac{\ln(5)}{\ln(2)}$. □

5 Logarithmusgleichungen

Bei einer Logarithmusgleichung steht die gesuchte Variable im Numerus eines Logarithmus. Auch hier gibt es verschiedene Lösungsverfahren, welche nachfolgend erläutert werden.

5.1 Definition des Logarithmus

Ist es möglich, durch Umformen der Gleichung zu erreichen, dass auf einer Seite ein einzelner Logarithmus und auf der anderen Seite eine einzelne Zahl stehen, so kann die Gleichung durch die Definition des Logarithmus gelöst werden.

Beispiel: *Es soll die Gleichung* $2 \cdot \log_3(9x) = 10$ *gelöst werden.*

Durch Division durch 2 erhält man die oben beschriebene Gestalt $\log_3(9x) = 5$. Unter Verwendung der Definition des Logarithmus kann man die Gleichung umformen zu

$$9x = 3^5 = 243.$$

Die Division durch 9 ergibt schließlich $x = 27$ als Lösung der ursprünglichen Gleichung. □

Beispiel: *Es soll die Gleichung* $\log_2(x) - \log_2(3) = 5$ *gelöst werden.*

Durch Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen kann man die linke Seite zusammenfassen, wodurch man folgende Gleichung erhält:

$$\log_2\left(\frac{x}{3}\right) = 5.$$

Das Anwenden der Definition des Logarithmus ergibt $\frac{x}{3} = 2^5 = 32$. Somit ist die Lösung der ursprünglichen Gleichung $x = 32 \cdot 3 = 96$. □

5.2 Numerivergleich

Dieses Verfahren ist zielführend, wenn man die Gleichung so umformen kann, dass auf jeder Seite der Gleichung nur noch ein einzelner Logarithmus mit der gleichen Basis steht. Ist dies erreicht, so werden die Numeri gleichgesetzt und die entstehende Gleichung gelöst.

Beispiel: *Es soll die Gleichung* $2 \cdot \log_5(x) = \log_5(x+6)$ *gelöst werden.*

Für die Anwendung des Numerivergleichs stört noch der Faktor 2 auf der linken Seite. Gemäß der Rechenregeln für Logarithmen kann der Faktor als Hochzahl in den Logarithmus geschrieben werden. Man erhält dadurch folgende Gleichung:

$$\log_5\left(x^2\right) = \log_5(x+6)$$

Nun können die Numeri gleichgesetzt werden, was zur quadratischen Gleichung $x^2 = x + 6$ führt, deren Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = -2$ sind. □

5.3 Substitution

Sollten mehrere Potenzen desselben Logarithmus vorkommen, so kann man (ähnlich wie bei einer Exponentialgleichung) den Logarithmus durch eine Variable ersetzen. Es entsteht eine neue Gleichung, die im ersten Schritt gelöst wird. Anschließend werden durch Rücksubstitution die Lösungen der ursprünglichen Gleichung bestimmt.

Beispiel: *Es soll die Gleichung* $(\log_3(x))^2 + 3 = 4 \cdot \log_3(x)$ *gelöst werden.*

Durch die Substitution $\log_3(x) = y$ erhält man die neue Gleichung

$$y^2 + 3 = 4y.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $y_1 = 1$ und $y_2 = 3$. Durch Rücksubstitution erhält man folgende Lösungen der ursprünglichen Gleichung:

$$\log_3(x) = 1 \Rightarrow x = 3^1 = 3 \qquad \text{und} \qquad \log_3(x) = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$$

□

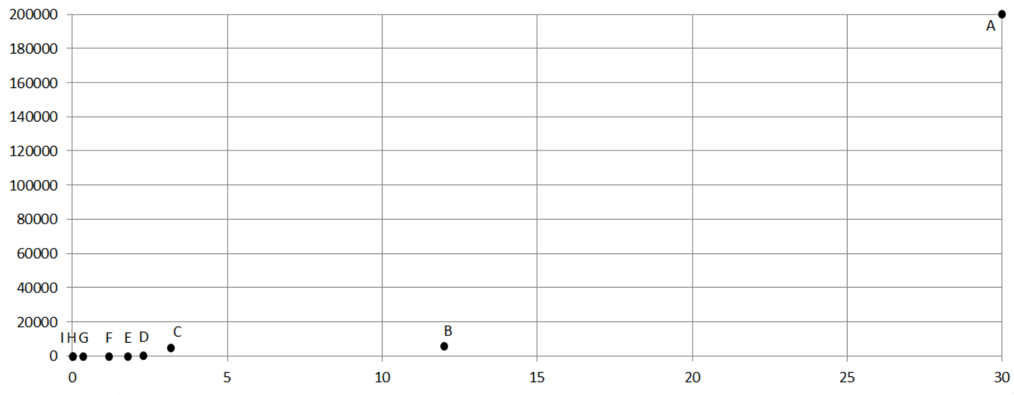
6 Logarithmische Skalierung

Bei der logarithmischen Skalierung wird bei mindestens einer Achse eines Koordinatensystems die Größe nicht linear aufgetragen sondern deren Logarithmus verwendet (meistens der dekadische Logarithmus). Dies hat den Vorteil, dass bei Größen, die über mehrere Zehnerpotenzen hinweg verteilt sind, ein besserer Überblick gewährt werden kann.

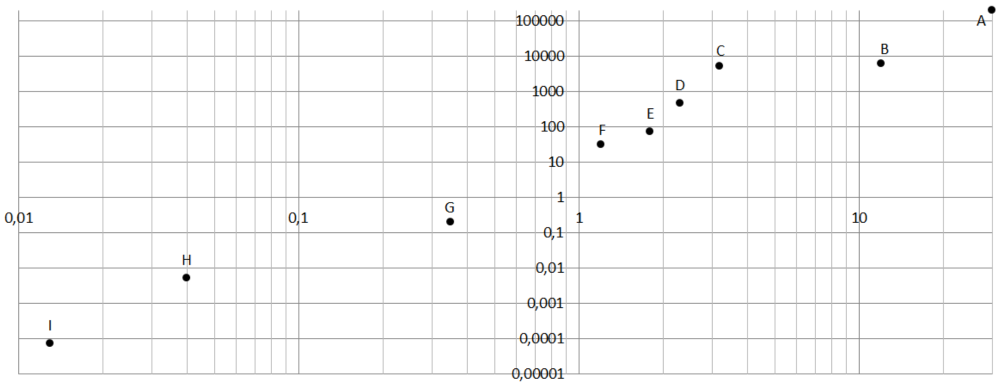
Beispiel: *Nachfolgend sind jeweils die Körpergröße* g *(in Metern) und die Masse* m *(in Kilogramm) verschiedener Tiere in angegeben. Dieser Datensatz soll einerseits durch ein Diagramm mit linearer Achsenskalierung und andererseits durch ein Diagramm mit doppeltlogarithmischer Skalierung (d. h. beide Achsen sind logarithmisch skaliert) dargestellt werden, wobei der dekadische Logarithmus verwendet werden soll. Auf der horizontalen Achse soll die Körpergröße und auf der vertikalen Achse die Masse aufgetragen werden.*

Tier	*Größe*	*Masse*	*Punkt*
Blauwal	*30*	*200000*	*A*
Tyrannosaurus	*12*	*6000*	*B*
Afrikanischer Elefant	*3,5*	*5000*	*C*
Eisbär	*2,3*	*450*	*D*
Mensch	*1,8*	*70*	*E*
Kaiserpinguin	*1,2*	*30*	*F*
Turmfalke	*0,35*	*0,2*	*G*
Laubfrosch	*0,04*	*0,005*	*H*
Wespe	*0,013*	*0,00007*	*I*

Nachfolgend wird das Diagramm mit linearer Skalierung abgebildet. Es ist hier unmöglich, die Masse der meisten Tiere abzulesen. Auch die Körpergröße von Laubfrosch und Wespe ist nicht ablesbar.



Im nachfolgenden doppeltlogarithmisch skalierten Diagramm ist hingegen jeder Wert gut ablesbar.



Beim Ablesen der Werte muss beachtet werden, dass der Bereich zwischen zwei Zehnerpotenzen nicht linear verläuft. In der obigen Abbildung wurden daher vertikale Hilfslinien verwendet. Der Punkt H liegt auf der 4. vertikalen Linie, wobei bei der davor liegenden Hauptlinie zu zählen begonnen wird. Daher wird der Wert 0,01 mit 4 multipliziert, was zur entsprechenden Größe von 0,04 m führt. Der Punkt G liegt zwischen der 3. und der 4. vertikalen Linie, wobei bei der Hauptlinie des Wertes 0,1 zu zählen begonnen wurde. Daher ist der x-Wert dieses Punktes zwischen 0,3 m und 0,4 m. □