Lineare Gleichungssysteme

1 Begriffsklärung

Eine lineare Gleichung ist eine Gleichung, welche eine oder mehrere Variablen in erster Potenz enthält (also ohne Exponent, ohne Wurzel, nicht im Nenner eines Bruches, ...). Auch das Produkt von Variablen darf nicht enthalten sein. Ein Beispiel einer linearen Gleichung ist folgende Gleichung:

$$2a + 5b + 3c = 7$$

Diese Gleichung ist lösbar. Beispielsweise erfüllt $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ diese Gleichung. Sie ist jedoch nicht eindeutig lösbar, denn auch $(a, b, c) = (0, 2, -1)$ ist eine Lösung. Darüber hinaus gibt es unendlich viele weitere Lösungen. Um mehrere Variablen eindeutig zu bestimmen, benötigt man mehr Informationen und somit mehr Gleichungen.

Werden mehrere lineare Gleichungen zusammengefasst, so spricht man von einem linearen Gleichungssystem. Ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem mit drei Variablen und drei Gleichungen ist Folgendes:

$$\begin{aligned}
[1] &\ \ 2a + 5b + 3c = 7 \\
[2] &\ \ a - 3b + 2c = 10 \\
[3] &\ \ 3a + 2b - 2c = 5
\end{aligned}$$

1.1 Lösung eines Gleichungssystems

Eine Lösung eines linearen Gleichungssystems ist eine Zahlenkombination, welche jede einzelne Gleichung erfüllt. Dazu setzt man für die gegebenen Variablen die Lösungswerte ein und überprüft, ob dadurch bei jeder Gleichung beide Seiten übereinstimmen.

Beispiel: *Es soll überprüft werden, ob $(a, b, c) = (3, -1, 2)$ eine Lösung des obigen Gleichungssystems ist.*

Setzt man in die drei Gleichungen ein, so erhält man folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
[1] &\ \ 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 7 \\
[2] &\ \ 3 - 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 10 \\
[3] &\ \ 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = 3 \neq 5
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Gleichungen sind zwar erfüllt, die dritte Gleichung jedoch nicht. Somit ist $(a, b, c) = (3, -1, 2)$ keine Lösung dieses Gleichungssystems. □

Um ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen eindeutig lösen zu können, benötigt man n linear unabhängige Gleichungen. „Linear unabhängig" bedeutet, dass man eine Gleichung nicht durch Kombinieren der anderen Gleichungen erzeugen kann. Hat man weniger als n linear unabhängige Gleichungen, so besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

1.2 Darstellungsformen

Es gibt zwei Standardformen, um lineare Gleichungssysteme anzugeben. Befinden sich alle Variablen auf einer Seite und die Zahl auf der anderen Seite, so spricht man von der allgemeinen Form. Diese hat folgende Grundstruktur:

$$
\begin{aligned}
&[1]\ \ a_1x + b_1y = c_1 \\
&[2]\ \ a_2x + b_2y = c_2
\end{aligned}
$$

Werden hingegen alle Gleichungen so umgeformt, dass jeweils dieselbe Variable auf einer Seite steht, und alle anderen Variablen und Zahlen auf der anderen Seite, so spricht man von der Normalform. Die Grundstruktur sieht folgendermaßen aus:

$$
\begin{aligned}
&[1]\ \ y = k_1x + d_1 \\
&[2]\ \ y = k_2x + d_2
\end{aligned}
$$

2 Grafische Lösungsverfahren

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen (auch als zweidimensionale Gleichungssysteme bezeichnet) können grafisch gelöst werden. Dazu gibt es zwei Vorgehensweisen, welche nachfolgend erläutert werden.

2.1 Interpretation als lineare Funktion

Bei diesem Verfahren werden die Gleichungen als lineare Funktionen betrachtet, deren Graph im Koordinatensystem dargestellt wird. Dazu geht man folgendermaßen vor:

1. Das Gleichungssystem wird in Normalform umgeformt (siehe Abschnitt 1.2).
2. Die einzelnen Gleichungen werden als lineare Funktion aufgefasst.
3. Der Graph dieser linearen Funktionen wird in ein Koordinatensystem gezeichnet.
4. Die Koordinaten des Schnittpunktes sind die Lösung des Gleichungssystems.

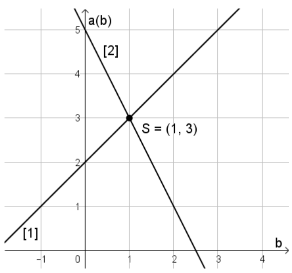
Beispiel: *Es soll das folgende lineare Gleichungssystem grafisch gelöst werden:*

$$
\begin{aligned}
&[1]\ \ a - b = 2 \\
&[2]\ \ a + 2b = 5
\end{aligned}
$$

Man hat hier zwei Möglichkeiten: Entweder man formt beide Gleichungen nach a um, sodass jeweils eine lineare Funktion $a(b)$ entsteht, oder man formt sie nach b um, sodass zwei lineare Funktionen $b(a)$ entstehen.

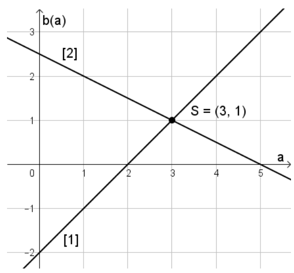
In der Praxis würde man sich für die einfachere Variante entscheiden. Das wäre in diesem Fall $a(b)$, da a in beiden Gleichungen keinen Faktor hat und somit keine Division erforderlich ist. In diesem Beispiel werden jedoch beide Varianten parallel durchgeführt.

$$
\begin{aligned}
&[1]\ \ a(b) = b + 2 \\
&[2]\ \ a(b) = 5 - 2b
\end{aligned}
$$



Lösung: $a = 3,\ b = 1$

$$
\begin{aligned}
&[1]\ \ b(a) = a - 2 \\
&[2]\ \ b(a) = 2{,}5 - \tfrac{1}{2}a
\end{aligned}
$$



Lösung: $a = 3,\ b = 1$

Links werden aus beiden Gleichungen lineare Funktionen $a(b)$ erzeugt. Das heißt, die unabhängige Variable b wird auf der horizontalen Achse abgelesen und die abhängige Variable a auf der vertikalen Achse. Da der Schnittpunkt links bei $(1 \mid 3)$ liegt, ist somit $a = 3$ und $b = 1$. Bei der rechten Variante wird a horizontal gemessen und b vertikal. Daher führt der Schnittpunkt $(3 \mid 1)$ auch hier zur Lösung $a = 3$ und $b = 1$. □

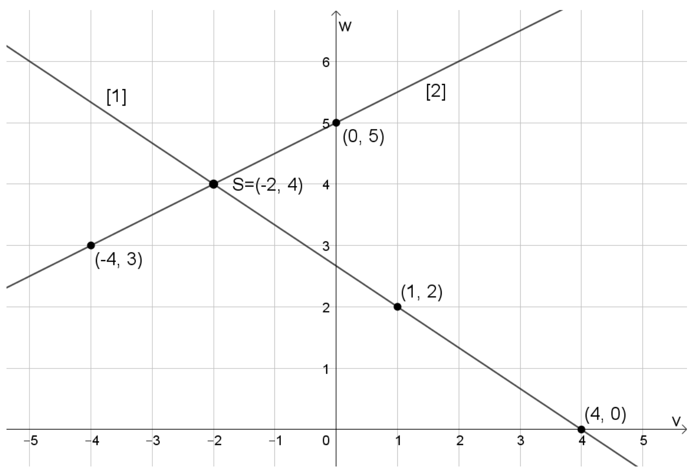
2.2 Punkte verbinden

Bei der zweiten Methode sucht man zwei möglichst „einfache“ Lösungen jeder Gleichung (z. B. ganzzahlige Koordinaten, die möglichst nahe am Ursprung liegen). Anschließend zeichnet man die beiden Punkte jeder Gleichung und verbindet sie. Auf diese Weise erhält man die Gerade, ohne die Gleichung zu einer linearen Funktion umformen zu müssen. Der Schnittpunkt der Gerade ist erneut die Lösung des linearen Gleichungssystems.

Beispiel: *Es soll das nachfolgende lineare Gleichungssystem grafisch gelöst werden:*

$$[1]\ \ 2v + 3w = 8$$
$$[2]\ \ v - 2w = -10$$

Für die erste Gleichung könnte man die beiden Lösungen $(v, w) = (4, 0)$ und $(v, w) = (1, 2)$ verwenden. Mögliche Lösungen der zweiten Gleichung sind $(v, w) = (0, 5)$ und $(v, w) = (-4, 3)$. Diese vier Punkte werden nun in ein Koordinatensystem gezeichnet, wobei die zusammengehörenden Punkte jeweils zu einer Gerade verbunden werden.



Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet somit $v = -2$ und $w = 4$. □

2.3 Vor- und Nachteile

Das grafische Lösen von Gleichungssystemen ist gut geeignet, um Lösungen näherungsweise zu bestimmen und dient der besseren Vorstellung. Es hat jedoch zahlreiche Nachteile:

- Es sind nur lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen lösbar.
- Es ist ungenau, falls der Schnittpunkt nicht genau auf einem Gitterpunkt liegt.
- Es ist zeitaufwändig und erfordert ein Lineal (oder Ähnliches).
- Für große bzw. sehr kleine Zahlen ist eine Achsenskalierung nötig.

Aufgrund dieser Nachteile ist es sinnvoll, auf rechnerische Lösungsverfahren zurückzugreifen. Diese werden in Kapitel 4 vorgestellt.

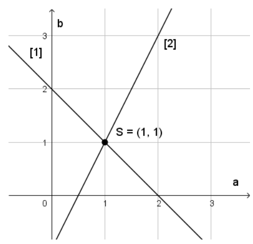
3 Lösungsfälle

Die linearen Gleichungssysteme aus den Beispielen des vorherigen Kapitels besaßen jeweils genau eine Lösung. Man konnte diese graphisch als Schnittpunkt der Geraden ablesen. Es gibt jedoch auch Fälle, bei denen es keine eindeutige Lösung gibt. Insgesamt unterscheidet man die folgenden drei Lösungsfälle:

genau eine Lösung
eindeutiger Schnittpunkt
einander schneidende Geraden

Allgemeine Form
$[1]\ \ a + b = 2$
$[2]\ \ -2a + b = -1$

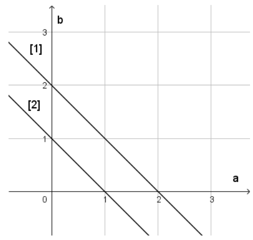
Normalform
$[1]\ \ b = -a + 2$
$[2]\ \ b = 2a - 1$



keine Lösung
kein Schnittpunkt
parallele Geraden

Allgemeine Form
$[1]\ \ a + b = 2$
$[2]\ \ a + b = 1$

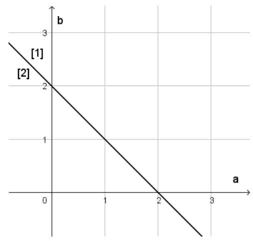
Normalform
$[1]\ \ b = -a + 2$
$[2]\ \ b = -a + 1$



unendlich viele Lösungen
unendlich viele Schnittpunkte
deckungsgleiche Geraden

Allgemeine Form
$[1]\ \ a + b = 2$
$[2]\ \ 2a + 2b = 4$

Normalform
$[1]\ \ b = -a + 2$
$[2]\ \ b = -a + 2$



Für lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen ist es relativ einfach, bereits anhand der Angabe zu erkennen, wie viele Lösungen es gibt. Dazu geht man je nach Form des Gleichungssystems unterschiedlich vor. In den folgenden beiden Abschnitten wird darauf eingegangen.

3.1 Normalform

Liegt das lineare Gleichungssystem in Normalform vor, so hat es folgende Grundstruktur:

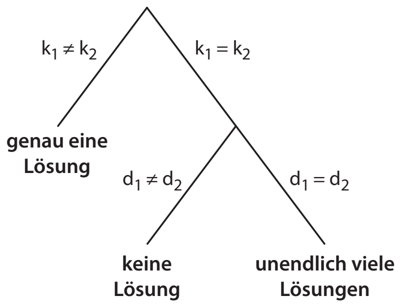
$$[1]\ \ y = k_1 x + d_1$$
$$[2]\ \ y = k_2 x + d_2$$

Sind die Steigungen verschieden, also $k_1 \neq k_2$, so besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung (weil sich die Geraden irgendwo schneiden).

Sind die Steigungen gleich, also $k_1 = k_2$, aber die Ordinatenabschnitte verschieden, also $d_1 \neq d_2$, dann besitzt das Gleichungssystem keine Lösung (weil die Geraden parallel und vertikal zueinander verschoben sind).

Sind die Steigungen und die Ordinatenabschnitte gleich, also $k_1 = k_2$ und $d_1 = d_2$, dann besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen (weil die Geraden deckungsgleich sind). Jeder Punkt der Gerade ist eine Lösung des Gleichungssystems.

Man kann man die drei Lösungsfälle auch gut als Diagramm veranschaulichen:



3.2 Allgemeine Form

Ist das lineare Gleichungssystem in allgemeiner Form gegeben, so hat es folgende Grundstruktur:

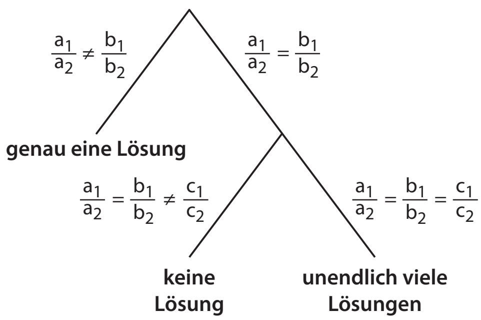
$$\begin{aligned}&[1]\ \ a_1x + b_1y = c_1\\ &[2]\ \ a_2x + b_2y = c_2\end{aligned}$$

Sind die linken Seiten der beiden Gleichungen keine Vielfachen voneinander, so gibt es immer eine eindeutige Lösung. Formal ausgedrückt bedeutet dies, dass $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ gelten muss.

Sind die linken Seiten Vielfache voneinander, aber die Gleichungen insgesamt nicht, so gibt es keine Lösung. Beispielsweise kann es keine Zahlen x und y geben, für die $x + y = 1$ und $2x + 2y = 3$ gilt. Formal ausgedrückt bedeutet dies, dass $\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ gelten muss.

Sind gesamten Gleichungen Vielfache voneinander, so gibt es unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet jedoch nicht, dass jede beliebige Zahlenkombination automatisch eine Lösung des Gleichungssystems ist. In Abschnitt 4.4 wird näher darauf eingegangen, wie die Lösungsmenge angegeben wird, wenn es unendlich viele Lösungen gibt. Man nennt die Gleichungen in diesem Fall linear abhängig. Formal ausgedrückt bedeutet dies, dass $\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ gelten muss.

Man kann diese drei Fälle durch folgendes Diagramm veranschaulichen



Beispiel: *Es ist das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:*

$$\begin{aligned}&[1]\ \ 3x_1 + 4x_2 = 1\\ &[2]\ \ 6x_1 + 8x_2 = 2\end{aligned}$$

Es soll ermittelt werden, wie viele Lösungen dieses Gleichungssystem besitzt, ohne es tatsächlich zu lösen. Anschließend sollen möglichst wenige Koeffizienten geändert werden, sodass die beiden anderen Lösungsfälle eintreten.

Man erkennt, dass die zweite Gleichung genau das Doppelte der ersten Gleichung ist. Somit besitzt dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Um zu erreichen, dass das Gleichungssystem keine Lösung besitzt, muss lediglich auf der rechten Seite eine der beiden Zahlen geändert werden. Dadurch sind zwar weiterhin die linken Seiten Vielfache voneinander, die gesamten Gleichungen jedoch nicht mehr. Ein mögliches Beispiel wäre folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}[1]\ \ 3x_1 + 4x_2 &= 1\\ [2]\ \ 6x_1 + 8x_2 &= 5\end{aligned}$$

Möchte man hingegen sicherstellen, dass es genau eine Lösung gibt, so dürfen die linken Seiten nicht mehr Vielfache voneinander sein. Dies kann man erreichen, indem man einen beliebigen Koeffizienten der linken Seite ändert. Nachfolgend ein mögliches Beispiel:

$$\begin{aligned}[1]\ \ 3x_1 + 5x_2 &= 1\\ [2]\ \ 6x_1 + 8x_2 &= 2\end{aligned}$$

□

4 Rechnerischen Lösungsverfahren

Das grafische Lösen eines Gleichungssystems ist meistens ungenau, speziell wenn der Schnittpunkt nicht mit einem Gitterpunkt des Koordinatensystems zusammenfällt oder große bzw. kleine Zahlen vorkommen, sodass die Koordinatenachsen skaliert werden müssen. Außerdem ist das grafische Lösen nur bei zwei Variablen durchführbar. Deshalb werden nun drei Standardverfahren zum rechnerischen Lösen von Gleichungssystemen beschrieben und jeweils anhand eines Beispiels veranschaulicht.

4.1 Einsetzungsverfahren bzw. Substitutionsverfahren

Beim Einsetzungsverfahren (auch Substitutionsverfahren genannt) wird eine beliebige Gleichung nach einer beliebigen Variable umgeformt. Anschließend wird in allen anderen Gleichungen diese Variable durch den entsprechenden Term ersetzt. Man erhält dadurch ein Gleichungssystem, das eine Gleichung und eine Variable weniger enthält.

Beispiel: *Es soll das folgende lineare Gleichungssystem anhand des Einsetzungsverfahrens gelöst werden:*

$$\begin{aligned}[1]\ \ 2x + y &= 4\\ [2]\ \ x - y &= -1\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung kann umgeformt werden zu $x = y - 1$. Anschließend wird in der ersten Gleichung statt x der Term $y - 1$ eingesetzt. Dabei ist die Klammer wichtig. Man erhält folgende Gleichung, in welcher nur noch die Variable y vorkommt:

$$2 \cdot (y - 1) + y = 4$$

Löst man diese Gleichung, so erhält man $y = 2$. Zum Schluss wird die andere Variable berechnet. Dazu ist es am einfachsten, in die bereits umgeformte Gleichung $x = y - 1$ einzusetzen. Man erhält auf diese Weise die Lösung $x = 1$. □

Das Einsetzungsverfahren ist sehr gut anwendbar, wenn eine Gleichung bereits nach einer Variable umgeformt ist bzw. in einer Gleichung eine Variable ohne Koeffizient vorkommt. Haben in jeder Gleichung alle Variablen einen Koeffizienten, so ist das Einsetzungsverfahren nicht empfehlenswert, da das Umformen häufig zu Brüchen führt.

Im Hinblick auf nichtlineare Gleichungssysteme ist das Einsetzungsverfahren wichtig, da hier viele andere Lösungsverfahren nicht verwendet werden können.

4.2 Gleichsetzungsverfahren

Bei diesem Verfahren werden beide Gleichungen nach derselben Variable umformt. Anschließend werden die entstehenden Terme gleichgesetzt. Man erhält dadurch eine lineare Gleichung mit einer Variable.

Beispiel: *Es soll das folgende lineare Gleichungssystem anhand des Gleichsetzungsverfahrens gelöst werden:*

$$[1]\ \ 2x + y = 4$$
$$[2]\ \ x - y = -1$$

Da in diesem Beispiel zweimal die Variable y ohne Koeffizient vorkommt, ist es sinnvoll, beide Gleichungen nach y umzuformen. Man erhält $y = 4 - 2x$ und $y = x + 1$. Im nächsten Schritt werden beide Terme gleichgesetzt, was zur folgenden Gleichung führt:

$$4 - 2x = x + 1$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet $x = 1$. Um die zweite Variable zu berechnen, wird das Ergebnis in eine der beiden bereits umgeformten Gleichungen eingesetzt (bevorzugt wird die einfachere Gleichung). Man erhält $y = 2$. □

Dieses Verfahren ist sehr eng mit dem Einsetzungsverfahrens verwandt. Es ist speziell bei Gleichungssystemen in Normalform sinnvoll, da hier bereits alle Gleichungen nach einer Variable umgeformt sind.

4.3 Eliminationsverfahren bzw. Additionsverfahren

Ziel dieses Verfahrens ist es, eine Variable zu eliminieren. Dazu werden die Gleichungen mit geeigneten Faktoren multipliziert, sodass die Koeffizienten einer Variable betragsmäßig gleich sind, jedoch entgegengesetztes Vorzeichen haben. Werden die Gleichungen anschließend addiert, fällt die Variable weg.

Beispiel: *Es soll das folgende lineare Gleichungssystem anhand des Eliminationsverfahrens gelöst werden:*

$$[1]\ \ 3x - 5y = 21$$
$$[2]\ \ 6x + 2y = 6$$

Im ersten Schritt wird die erste Gleichung mit -2 multipliziert, was zu folgendem Gleichungssystem führt:

$$[1]\ \ -6x + 10y = -42$$
$$[2]\ \ 6x + 2y = 6$$

Somit hat die Variable x in beiden Gleichungen betragsmäßig den gleichen Koeffizienten, jedoch mit entgegengesetzten Vorzeichen. Nun werden beide Gleichungen addiert und man erhält die folgende lineare Gleichung:

$$12y = -36$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $y = -3$. Das Resultat wird in eine passende Gleichung eingesetzt (z. B. die zweite Gleichung des ursprünglichen Gleichungssystems). Durch Umformen erhält man die Lösung der zweiten Variable, welche $x = 2$ lautet. □

In vielen Fällen ist das Eliminationsverfahren das effizienteste dieser drei Verfahren. Beispielsweise ist es relativ gut einsetzbar, wenn es sich bei den Koeffizienten um Brüche handelt. Hingegen ist es bei Dezimalzahlen nur begrenzt einsetzbar. Ein weiterer Nachteil ist, dass im Vergleich zu den vorherigen beiden Verfahren für die zweite Variable noch keine fertig umgeformte Gleichung zur Verfügung steht.

4.4 Lösungsmenge bei linear abhängigen Gleichungen

In Kapitel 3 wurde erwähnt, dass es unendlich viele Lösungen gibt, wenn die Gleichungen eines linearen Gleichungssystems linear abhängig sind. Dies bedeutet jedoch nicht, dass jede beliebige Zahlenkombination eine Lösung des Gleichungssystems ist.

Im grafischen Lösungsverfahren erhielt man zwei deckungsgleiche Geraden, welche unendlich viele Schnittpunkte haben. Daher ist jeder Punkt dieser Geraden eine Lösung des Gleichungssystems. Nachfolgendes Beispiel wird zeigen, wie die Lösungsmenge in diesem Fall angegeben werden kann.

Beispiel: *Es soll die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems bestimmt werden:*

$$\begin{aligned} &[1]\ \ 2x + 3y = 7 \\ &[2]\ \ 4x + 6y = 14 \end{aligned}$$

Gemäß Abschnitt 3.2 hat dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, da die beiden Gleichungen Vielfache voneinander sind. Jedes Paar (x, y), das die Gleichung $2x + 3y = 7$ erfüllt, ist Lösung dieses Gleichungssystems. Daher kann die Lösungsmenge folgendermaßen angegeben werden:

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 7\}$$

□

5 Weitere Lösungsverfahren

Neben den hier vorgestellten Lösungsverfahren existiert eine Vielzahl weiterer Methoden zum Lösen linearer Gleichungssysteme. Diese Verfahren sind etwas komplizierter, eignen sich jedoch besser, um Gleichungssysteme mit mehr als zwei Variablen systematisch zu lösen bzw. um einen Computeralgorithmus zu entwickeln, der lineare Gleichungssystemen lösen kann. Da diese Verfahren die Grundlagen der Matrizenrechnung voraussetzen, werden sie im zugehörigen Skriptum behandelt:

`https://mathe.zone/data/skripten/matrizenrechnung.pdf` (Kapitel 5)