Lineare Funktionen

Eine lineare Funktion wird verwendet, um Sachverhalte zu beschreiben, welche sich in gleichen Abständen um jeweils denselben absoluten Wert ändern. Nachfolgend ein paar Beispiele:

– Fährt ein Auto konstant mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h, so vergrößert sich der zurückgelegte Weg pro Stunde um 80 km.

– Ein bestimmter Rohstoff kostet 530 € pro Tonne. Möchte ein Unternehmen um 100 kg mehr kaufen, so steigen die Kosten dadurch um 53 €.

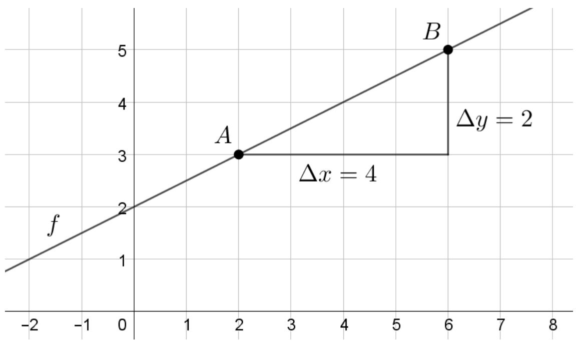
– Die Downloadgeschwindigkeit eines bestimmten Computerspiels beträgt konstant 2,5 MB/s. Innerhalb einer Minute verringert sich die ausstehende Datenmenge somit um 1,5 GB.

1 Grundlagen

Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion hat folgende Struktur:

$$f(x) = k \cdot x + d$$

Den Parameter k bezeichnet man als Steigung und den Parameter d als Ordinatenabschnitt. Der Funktionsgraph einer linearen Funktion entspricht einer Gerade.



Anhand der obigen Abbildung werden nachfolgend die Parameter k und d erklärt.

1.1 Ordinatenabschnitt

Der Ordinatenabschnitt d gibt an, in welcher Höhe der Funktionsgraph die vertikale Achse schneidet. Er entspricht dem Funktionswert an der Stelle 0 und kann daher durch $f(0)$ berechnet werden. In der obigen Abbildung beträgt der Ordinatenabschnitt 2.

Als Ordinate bezeichnet man die vertikale Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Der Ordinatenabschnitt wird daher auch häufig y-Achsenabschnitt genannt, wobei dies oft nicht korrekt ist, da die vertikale Achse nicht unbedingt mit y bezeichnet wird. Je nach Sachverhalt sind auch die Bezeichnungen „Startwert" bzw. „Anfangswert" gebräuchlich.

1.2 Steigung

Die Steigung k ist ein Maß dafür, wie steil die Gerade ansteigt bzw. abfällt. Konkret gibt sie an, wie sich der Funktionswert ändert, wenn die unabhängige Variable um 1 vergrößert wird. Man unterscheidet drei Fälle:

– Ist die Steigung positiv, dann ist die Funktion streng monoton steigend und der Funktionsgraph entspricht einer nach rechts ansteigenden Gerade.

– Ist die Steigung negativ, dann ist die Funktion streng monoton fallend und der Funktionsgraph entspricht einer nach rechts abfallenden Gerade.

– Ist die Steigung null, dann ist die Funktion konstant und der Funktionsgraph entspricht einer waagrechten Gerade.

Kennt man zwei beliebige Punkte $A(x_A \,|\, y_A)$ und $B(x_B \,|\, y_B)$ des Funktionsgraphen, so kann die Steigung durch die folgenden Formeln bestimmt werden:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Verwendet man diese Formel für die obige Abbildung, so erhält man folgende Steigung:

$$k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Das Symbol Δ ist der griechische Großbuchstabe „Delta“. Damit werden in der Mathematik und in den Naturwissenschaften häufig Abstände bezeichnet. Hier ist Δy der vertikale Abstand zwischen zwei Punkten und Δx der horizontale Abstand zwischen zwei Punkten.

2 Funktionsgraph erstellen

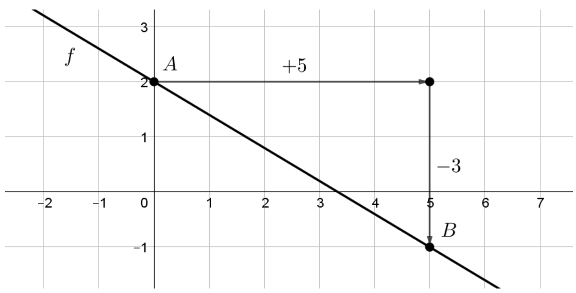
Der Graph einer linearen Funktion entspricht einer Gerade. Das bedeutet, dass man zwei Punkte des Funktionsgraphen kennen muss, um diesen vollständig zeichnen zu können. Es gibt dafür verschiedene Methoden:

1. Man wählt zwei beliebige x-Werte aus und setzt sie in die Funktionsgleichung ein, um die zugehörigen Funktionswerte zu erhalten. Somit kennt man zwei Punkte des Graphen und kann den gesamten Funktionsgraphen erhalten, indem man eine Gerade durch diese Punkte zeichnet.

2. Einen Punkt kann man sofort durch den Ordinatenabschnitt d erhalten, denn der Punkt $(0 \mid d)$ ist immer Teil des Funktionsgraphen. Geht man von diesem Punkt 1 nach rechts und k nach oben (bzw. bei negativer Steigung nach unten), so erhält man einen zweiten Punkt. Dies ist deshalb möglich, weil die Steigung angibt, wie sich der Funktionswert ändert, wenn die unabhängige Variable um 1 vergrößert wird.

   Bei rationalen Steigungen ist es empfehlenswert, nicht 1 nach rechts und k nach oben zu gehen, da dies meistens ungenau ist. Stattdessen sollte man den Nenner nach rechts und den Zähler nach oben (bzw. bei negativer Steigung nach unten) gehen. Zum Beispiel würde man bei $k = \frac{5}{2}$ um 2 nach rechts und um 5 nach oben gehen.

Beispiel: *Es soll der Graph der linearen Funktion $f(x) = 2 - \frac{3}{5}\,x$ gezeichnet werden.*



Um den oben abgebildeten Funktionsgraphen zu erhalten, geht man folgendermaßen vor:

– Begonnen wird mit Punkt A. Dazu geht man auf der vertikalen Achse 2 nach oben, da der Ordinatenabschnitt $d = 2$ lautet.
– Da es sich bei $k = -\frac{3}{5}$ um eine rationale Steigung handelt, geht man vom Punkt A aus um 5 nach rechts (Nenner) und anschließend um 3 nach unten (Zähler), um den Punkt B zu erhalten.
– Abschließend verbindet man beide Punkte durch eine Gerade. □

3 Funktionsgleichung bestimmen

In diesem Kapitel wird erläutert, wie man anhand verschiedener Informationen die Funktionsgleichung einer linearen Funktion bestimmen kann.

3.1 Zwei Punkte vorgegeben

Kennt man zwei Punkte des Funktionsgraphen einer linearen Funktion, dann lässt sich dadurch die Funktionsgleichung eindeutig bestimmen. Die Vorgehensweise ist Folgende:

1. Man berechnet mit der Formel von Seite 2 die Steigung.
2. Man setzt in $f(x) = k \cdot x + d$ die Steigung und die Koordinaten eines gegebenen Punktes ein. Der Funktionswert $f(x)$ entspricht dabei der y-Koordinate des Punktes.
3. Die dadurch entstehende Gleichung wird nach d umgeformt.
4. Die fertige Funktionsgleichung wird angeschrieben.

Beispiel: *Es soll die Funktionsgleichung einer linearen Funktion bestimmt werden, deren Graph durch die Punkte* $(-2 \mid 5)$ *und* $(3 \mid -2)$ *verläuft.*

Im ersten Schritt wird die Steigung ermittelt:

$$k = \frac{-2-5}{3-(-2)} = -\frac{7}{5} = -1{,}4$$

Nun werden die Steigung sowie die Koordinaten eines Punktes in die Grundgleichung $f(x) = k \cdot x + d$ eingesetzt. Es wird dazu der Punkt $(-2 \mid 5)$ verwendet. Die entstehende Gleichung wird nach d umgeformt.

$$5 = -1{,}4 \cdot (-2) + d \quad \Rightarrow \quad d = 2{,}2$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet somit $f(x) = -1{,}4\,x + 2{,}2$. □

Beispiel: *Die monatlichen Gesamtkosten für einen Strombedarf von 120 kWh betragen 9,80 €. Bei 160 kWh betragen sie 12,00 €. Es soll eine lineare Funktion erstellt werden, welche die Gesamtkosten in Abhängigkeit des Strombedarfs beschreibt.*

Die unabhängige Variable ist hier der Strombedarf (in kWh) und die abhängige Variable ist der zugehörige Preis (in €). Zunächst wird die Steigung berechnet:

$$k = \frac{12{,}00 - 9{,}80}{160 - 120} = 0{,}055\,€/\mathrm{kWh}$$

Als nächstes wählt man einen der beiden Punkte aus, und setzt seine Koordinaten gemeinsam mit der soeben berechneten Steigung in den Ansatz $K(x) = k \cdot x + d$ ein und formt nach d um.

$$12 = 0{,}055 \cdot 160 + d \quad \Rightarrow \quad d = 3{,}20\,€$$

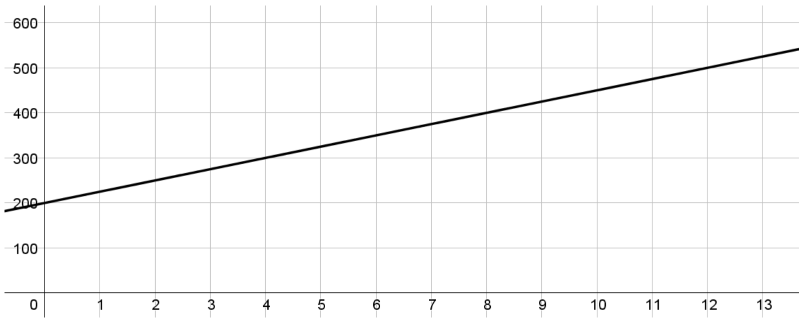
Die vollständige Kostenfunktion lautet somit $K(x) = 0{,}055x + 1{,}36$. Die monatliche Grundgebühr beträgt 3,20 € und eine Kilowattstunde kostet 5,5 Cent. □

3.2 Funktionsgraph vorgegeben

Gegeben ist der Funktionsgraph einer linearen Funktion, also eine Gerade im kartesischen Koordinatensystem. Gesucht ist eine zugehörige Funktionsgleichung in der Form $f(x) = k \cdot x + d$. Zur Erstellung dieser Funktionsgleichung geht man folgendermaßen vor:

- Den Ordinatenabschnitt d kann man ablesen, indem man abmisst, in welcher Höhe die Gerade die vertikale Achse schneidet.
- Zur Bestimmung der Steigung k wählt man zwei möglichst weit voneinander entfernte Punkte des Graphen aus (damit die Messungenauigkeiten möglichst wenig Einfluss haben) und misst deren Koordinaten. Falls vorhanden, sind Punkte zu bevorzugen, deren Koordinaten exakt abgelesen werden können. Die Steigung wird anschließend mit der Formel von Seite 2 berechnet.
- Am Ende muss die vollständige Funktionsgleichung angeschrieben werden, indem man in den Ansatz $f(x) = k \cdot x + d$ die ermittelten Werte für k und d einsetzt.

Beispiel: *Es soll eine Funktionsgleichung erstellt werden, welche den nachfolgend abgebildeten Funktionsgraphen beschreibt.*



Für den Ordinatenabschnitt erhält man $d = 200$, da die vertikale Achse bei 200 geschnitten wird. Als weiteren Punkt kann man beispielsweise den Punkt $(8 \mid 400)$ verwenden, da dieser exakt abgelesen werden kann. Durch Einsetzen dieser Information in die Formel von Seite 2 erhält man folgende Steigung:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{400 - 200}{8 - 0} = 25$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet somit $f(x) = 25\,x + 200$. □

Ist es nicht möglich, den Ordinatenabschnitt exakt abzulesen, kann man stattdessen versuchen, zwei Punkte des Graphen exakt abzulesen. Anschließend kann die in Abschnitt 3.1 beschriebene Methode verwendet werden.

4 Nullstelle

Allgemein liegt eine Nullstelle vor, wenn der Funktionsgraph die horizontale Achse schneidet. Daher können Nullstellen berechnet werden, indem die Gleichung $f(x) = 0$ gelöst wird. Eine lineare Funktion mit Steigung $k \neq 0$ hat immer genau eine Nullstelle.

Beispiel: *Es soll die Nullstelle der Funktion $f(x) = 1{,}2\,x + 3$ berechnet werden.*

Die Lösung der Gleichung $1{,}2\,x + 3 = 0$ lautet $x = -2{,}5$. Daher liegt die Nullstelle dieser Funktion bei $-2{,}5$. □

Beispiel: *Ein Öltank soll ausgepumpt werden. Der momentane Ölstand beträgt 2,35 m. Pro Minute sinkt er um 8 cm. Es soll berechnet werden, wann der Tank leer ist.*

Die zugehörige Funktionsgleichung lautet $h(t) = 2{,}35 - 0{,}08t$. Der Tank ist leer, wenn die Höhe h null ist:

$$\begin{aligned} 0 &= 2{,}35 - 0{,}08t \\ 0{,}08t &= 2{,}35 \\ t &= 29{,}375 \end{aligned}$$

Die Nullstelle dieser Funktion befindet sich bei 29,375 Minuten. Somit ist der Tank nach ungefähr einer halben Stunde leer. □

5 Schnittpunkt

Gegeben sind die Funktionsgleichungen zweier linearer Funktionen f und g mit unterschiedlichen Steigungen. Man möchte wissen, an welchem Punkt sich die Graphen schneiden. Da beim Schnittpunkt die Funktionswerte der beiden Funktionen übereinstimmen, werden diese zur Berechnung des Schnittpunktes gleichgesetzt. Es wird also die Gleichung $f(x) = g(x)$ gelöst, um den x-Wert des Schnittpunktes zu erhalten. Durch Einsetzen dieses x-Wertes in einen der beiden Funktionsterme erhält man den zugehörigen y-Wert.

Beispiel: *Es soll der Schnittpunkt der Funktionen $f(x) = 3x + 5$ und $g(x) = 2x - 1$ berechnet werden.*

Den x-Wert des Schnittpunktes erhält man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 3x + 5 &= 2x - 1 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $x = -6$ in einen der beiden Funktionsterme erhält man den zugehörigen Funktionswert.

$$f(-6) = 3 \cdot (-6) + 5 = -13$$

Der Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen lautet somit $(-6 \mid -13)$. Als Kontrolle könnte man in die zweite Funktion einsetzen. Man erhält $g(-6) = -13$. □

6 Parallele und normale Geraden

Anhand der Steigung ist es möglich, festzustellen, ob zwei Geraden parallel bzw. normal zueinander sind. Das Wort „normal“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass sie im rechten Winkel zueinander stehen. Andere Bezeichnungen dafür wären „senkrecht“ bzw. „orthogonal“.

Es gelten die folgenden Zusammenhänge, wobei k_1 und k_2 die Steigungen der beiden Geraden sind:

- Zwei Geraden sind genau dann parallel zueinander, wenn ihre Steigungen gleich sind.

$$k_1 = k_2$$

- Zwei Geraden sind genau dann normal zueinander, wenn ihre Steigungen die negativen Kehrwerte voneinander sind.

$$k_1 = -\tfrac{1}{k_2} \qquad \text{bzw.} \qquad k_2 = -\tfrac{1}{k_1}$$

Beispiel: *Es ist die Funktionsgleichung $f(x) = 3x - 2$ gegeben. Gesucht ist die Funktionsgleichung einer linearen Funktion, welche den Funktionsgraphen von f an der Stelle 2 im rechten Winkel schneidet.*

Die Steigung der gesuchten Funktion lautet gemäß der obigen Formel $-\frac{1}{3}$. Der Schnittpunkt ist $(2 \mid 4)$, da die Funktion f an der Stelle 2 den Wert 4 hat. Durch Einsetzen dieser Informationen in die Grundgleichung $g(x) = k \cdot x + d$ erhält man die Gleichung $4 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + d$. Die Lösung dieser Gleichung ist $d = \frac{14}{3}$. Somit lautet die gesuchte Funktionsgleichung $g(x) = -\frac{1}{3}\,x + \frac{14}{3}$. □

7 Position eines Punktes bezüglich einer Gerade

Möchte man wissen, ob der Punkt A oberhalb oder unterhalb des Funktionsgraphen liegt bzw. ob er Teil des Funktionsgraphen ist, so berechnet man den Funktionswert $f(x_A)$. Ist $f(x_A) < y_A$, so liegt der Punkt A oberhalb des Graphen, bei $f(x_A) = y_A$ liegt er genau darauf und bei $f(x_A) > y_A$ liegt er unterhalb.

Beispiel: *Es soll ermittelt werden, wo der Punkt $(3 \mid 5)$ relativ zum Graphen der Funktion $f(x) = 3x - 2$ liegt.*

Dazu wird der x-Wert des Punktes in den Funktionsterm eingesetzt: $f(3) = 3 \cdot 3 - 2 = 7$. Da der Funktionswert bei $x = 3$ größer als 5 ist, bedeutet dies, dass der gegebene Punkt unterhalb des Graphen liegt. □

8 Stückweise definierte Funktionen

Bei vielen Sachverhalte ist der Gültigkeitsbereich eines Funktionsterms eingeschränkt. Möchte man den Zusammenhang für die gesamte Definitionsmenge beschreiben, so benötigt man mehrere Funktionsterme. Man spricht von stückweise definierten Funktionen. Beispiele für stückweise definierte Funktionen findet man bei Bewegungsvorgängen (siehe Beispiel unten), Tarifen (z. B. Handytarif, Einkommensteuer) oder bei elektrischen Signalen.

Die Funktionsgleichung solcher Funktionen wird durch eine sogenannte Fallunterscheidung angegeben. Dabei wird jeweils festgelegt, unter welchen Bedingungen die einzelnen Funktionsterme gültig sind. Die Grundstruktur einer Fallunterscheidung sieht folgendermaßen aus:

$$f(x) = \begin{cases} \text{Funktionsterm 1,} & \text{falls Bedingung 1} \\ \text{Funktionsterm 2,} & \text{falls Bedingung 2} \\ \text{...} & \end{cases}$$

Beispiel: *Eine U-Bahn benötigt für die Strecke zwischen zwei Stationen 50 Sekunden. Zunächst beschleunigt sie 15 Sekunden lang mit 1,2 m/s^2. Danach fährt sie 17 Sekunden lang mit konstanter Geschwindigkeit bevor sie 18 Sekunden lang mit 1,0 m/s^2 abbremst. Es soll eine Funktionsgleichung erstellt werden, welche die Geschwindigkeit der U-Bahn (gemessen in m/s) im Zeitintervall $[0; 50]$ s beschreibt. Anschließend soll diese Funktion grafisch dargestellt werden.*

Für die Geschwindigkeitsfunktion sind hier drei verschiedene Terme notwendig, welche nachfolgend erstellt werden:

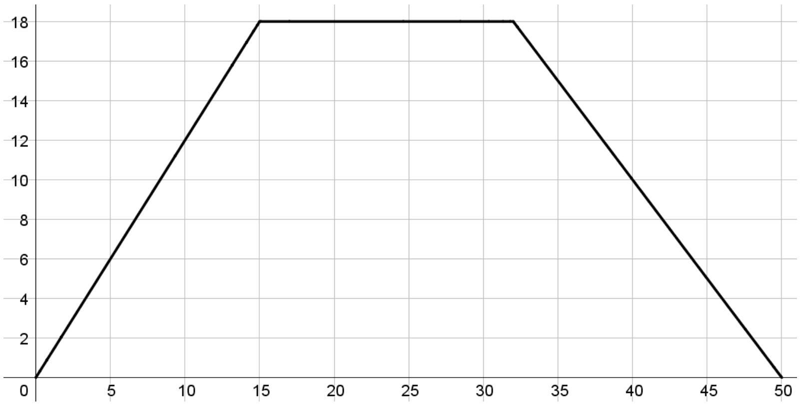
1. Beschleunigung: Diese Phase kann durch den Term $1{,}2 \cdot t$ beschrieben werden, wobei t die Zeit in Sekunden seit dem Start angibt.
2. Gleichmäßige Fahrt: Hier liegt die Geschwindigkeit konstant bei 18 m/s, weshalb der Funktionsterm 18 ist. Man erhält diesen Wert, indem man die Geschwindigkeit am Ende der Beschleunigungsphase berechnet, also $1{,}2 \cdot 15$.
3. Bremsvorgang: Für den Bremsvorgang erhält man den Funktionsterm $18 - 1{,}0 \cdot (t - 32)$, wobei t erneut die Zeit seit dem Start angibt und 18 die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorganges ist. Da der Bremsvorgang erst nach 32 Sekunden beginnt, muss man von der Gesamtzeit die ersten 32 Sekunden abziehen. Vereinfacht man den Term, so erhält man $50 - t$.

Die vollständige Geschwindigkeitsfunktion $v : [0, 50] \to \mathbb{R}$, welche jedem Zeitpunkt t (in Sekunden) die momentane Geschwindigkeit in m/s zuordnet, lautet folgendermaßen:

$$v(t) = \begin{cases} 1{,}2t, & \text{falls } 0 \leq t < 15 \\ 18, & \text{falls } 15 \leq t < 32 \\ 50 - t, & \text{falls } 32 \leq t \leq 50 \end{cases}$$

Möchte man beispielsweise die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt berechnen, so wählt man zunächst den passenden Funktionsterm und setzt für t den entsprechenden Wert ein.

Der zugehörige Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



□