Komplexe Zahlen

In der Geschichte der Mathematik kam es immer wieder vor, dass bestimmte Probleme mit den aktuell zur Verfügung stehenden Begriffen nicht gelöst werden konnten. Beispielsweise war es für die Bestimmung der Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge 1 erforderlich, die Menge der rationalen Zahlen zu verlassen und mit Zahlen zu arbeiten, die nicht als Bruch dargestellt werden können. So kam es zur Einführung der irrationalen Zahlen.

Nun stelle man sich vor, man möchte die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösen. Man erkennt sofort, dass $\sqrt{-1}$ eine Lösung dieser Gleichung wäre. Das Problem dabei ist jedoch, dass dies keine reelle Zahl sein kann, denn für jede reelle Zahl gilt, dass ihr Quadrat größer oder gleich null ist. Das Quadrat von $\sqrt{-1}$ ist jedoch -1. Somit kann die Lösung der Gleichung nicht mit den für uns vertrauten reellen Zahlen beschrieben werden und es ist daher eine weitere Verallgemeinerung des Zahlbegriffs notwendig. Es wurden die komplexen Zahlen erschaffen.

Reale Anwendungen von komplexen Zahlen gibt es in der Elektrotechnik bei der Beschreibung von Wechselstromwiderständen (Impedanzen) und in der Informatik, bei welcher komplexe Zahlen u. a. verwendet werden, um Objekte in der Ebene zu drehen. In der Optik können sie zur Beschreibung der Absorption eingesetzt werden. Darüber hinaus spielen sie in der Quantenmechanik eine zentrale Rolle.

1 Grundbegriffe

Der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707 – 1783) führte die sogenannte imaginäre Einheit i ein, für welche folgender Zusammenhang gilt:

$$i^2 = -1$$

In weiterer Folge gilt somit $i = \pm\sqrt{-1}$. Es ist jedoch wichtig, hier zu Berücksichtigen, dass es für i zwei mögliche Werte gibt. Lässt man diese Tatsache außer Acht, können dadurch falsche Schlussfolgerungen entstehen.

In der Elektrotechnik ist es üblich, anstelle von i die Bezeichnung j zu verwenden, da i dort häufig für den Wechselstrom verwendet wird.

1.1 Potenzen der imaginären Einheit

Häufig tauchen Potenzen der imaginären Einheit i auf. Diese sollen jedoch in Ergebnissen von Berechnungen nicht mehr vorkommen. Nachfolgend wird beschrieben, wie man diese Potenzen umwandelt:

- Für i^0 erhält man auch hier gemäß der Rechenregeln für Potenzen den Wert 1.
- Statt i^1 kann i geschrieben werden.
- Der Ausdruck i^2 ist laut Definition -1.
- Für i^3 erhält man $-i$, denn man kann gemäß der Rechenregeln für Potenzen folgende Aufspaltung durchführen: $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$.
- Die Potenz i^4 ergibt 1, denn $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$.

Für alle anderen ganzzahligen Exponenten wird der Exponent solange um 4 verkleinert bzw. vergrößert, bis er entweder 0, 1, 2, 3 oder 4 beträgt und somit auf einen der obigen Fälle zurückgeführt werden kann.

Beispiel: *Es sollen die Potenzen i^{15}, $\frac{1}{i}$ und i^{-11} vereinfacht werden.*

Im ersten Beispiel kann die Potenz zerlegt werden in $i^{12} \cdot i^3$. Der erste Faktor fällt weg, denn $i^{12} = (i^4)^3 = 1^3 = 1$. Übrig bleibt i^3, was gemäß der obigen Überlegungen $-i$ entspricht.

Die Potenz des zweiten Beispiels kann auch als i^{-1} geschrieben werden. Multipliziert man mit i^4 (was jederzeit möglich ist, da es sich letztendlich nur um eine Multiplikation mit 1 handelt), so erhält man $i^{-1} \cdot i^4 = i^3 = -i$.

Im dritten Beispiel geht man ähnlich vor. Hier wird mit i^{12} multipliziert (auch das ist möglich, da es sich ebenfalls um 1 handelt). Man erhält $i^{-11} \cdot i^{12} = i^1 = i$. □

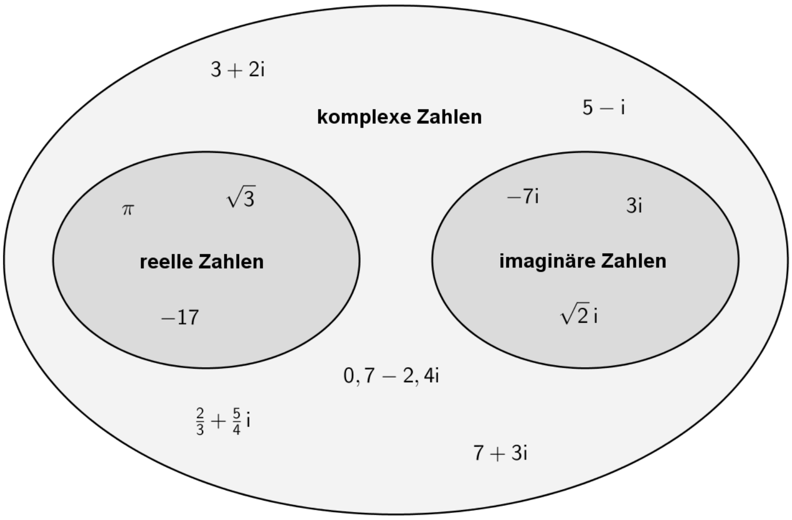
1.2 Imaginäre Zahlen

Eine Zahl, die ein Vielfaches der imaginären Einheit darstellt, bezeichnet man als imaginäre Zahl. Beispiele dafür wären $5i$, $-3i$ oder i selbst.

1.3 Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl besteht allgemein aus einem reellen Anteil und aus einem imaginären Anteil. Ein Beispiel einer komplexen Zahl wäre $7 - 2i$. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Jede reelle Zahl ist ein Spezialfall einer komplexen Zahl, bei welcher der imaginäre Anteil entfällt. Auch imaginäre Zahlen sind Spezialfälle von komplexen Zahlen. Hier entfällt der reelle Anteil. Nachfolgende Abbildung gibt einen Überblick über diese drei Zahlenmengen.



1.4 Realteil und Imaginärteil

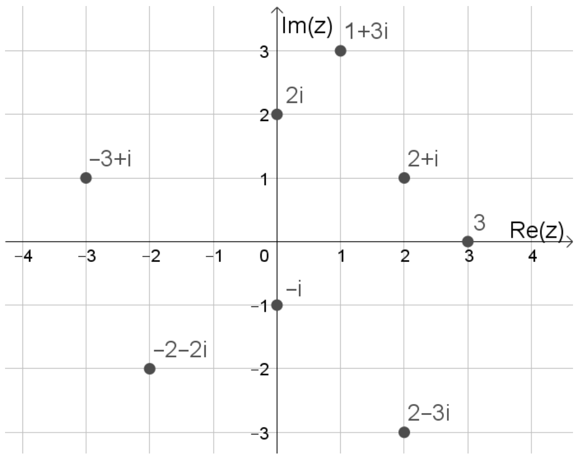
Sei nun $z \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl. Dann kann man diese Zahl in der Form $z = a + bi$ anschreiben, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Man nennt diese Darstellungsform die kartesische bzw. algebraische Form. Den reellen Anteil a bezeichnet man als Realteil. Man schreibt dafür kurz Re(z). Den Faktor b der imaginären Einheit nennt man Imaginärteil und schreibt dafür Im(z).

Beispiel: *Gegeben ist die komplexe Zahl $z = 13 - 7i$. Dann ist Re$(z) = 13$ und Im$(z) = -7$.*

□

1.5 Gaußsche Zahlenebene

Jede reelle Zahl kann man auf der eindimensionalen Zahlengerade einzeichnen. Möchte man auch komplexe Zahlen grafisch darstellen, so muss man die Zahlengerade um eine Dimension erweitern. Man erhält die sogenannte Gaußsche Zahlenebene – ein zweidimensionales Koordinatensystem, bei welchem auf der horizontalen Achse der Realteil und auf der vertikalen Achse der Imaginärteil einer komplexen Zahl aufgetragen wird. Die nachfolgende Abbildung zeigt einige komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.



1.6 Betrag

Der Betrag einer reellen Zahl gibt an, wie weit diese vom Ursprung der Zahlengerade entfernt ist. Analog dazu beschreibt der Betrag einer komplexen Zahl, wie weit diese vom Ursprung der Gaußschen Zahlenebene entfernt ist. Man kann den Betrag durch den Satz von Pythagoras berechnen. Für $z = a + bi$ gilt folgende Formel:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Beispiel: *Es soll der Betrag der komplexen Zahl $z = 12 - 5i$ berechnet werden.*

$$|z| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

□

1.7 Komplex konjugierte Zahl

Gegeben ist eine komplex Zahl $z = a + bi$. Die zu z komplex konjugierte Zahl wird meistens mit $\bar{z}$ (selten auch mit z^*) bezeichnet. Man erhält sie aus der gegebenen Zahl z, indem man das Vorzeichen des Imaginärteils ändert. Benötigt wird sie u. a. für die Division von komplexen Zahlen.

Beispiel: *Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -5 - 3i$ und $z_3 = 4i$.*

Die zugehörigen komplex konjugierten Zahlen lauten $\bar{z}_1 = 3 - 2i$, $\bar{z}_2 = -5 + 3i$ und $\bar{z}_3 = -4i$. □

In der Gaußschen Zahlenebene entspricht die komplexe Konjugation einer Spiegelung der Zahl an der reellen Achse.

Gelegentlich wird das Produkt einer komplexen Zahl und der zugehörigen komplex konjugierten Zahl benötigt. Hierfür gilt folgende Formel:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Herleitung: Für die Herleitung wird die Multiplikation von komplexen Zahlen benötigt (siehe Kapitel 2.2). Ist $z = a + bi$ eine beliebige komplexe Zahl, dann ist $\bar{z} = a - bi$ die zugehörige komplex konjugierte Zahl. Durch Multiplikation erhält man folgendes Resultat:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 - b^2 i^2$$

Wegen $i^2 = -1$ kann man das Ergebnis vereinfachen zu $a^2 + b^2$. Betrachtet man die Formel für den Betrag von komplexen Zahlen, so erkennt man, dass es sich um dessen Quadrat $|z|^2$ handelt. ■

2 Rechenregeln für komplexe Zahlen

In diesem Kapitel werden die Rechenregeln für komplexe Zahlen in kartesischer Form behandelt.

2.1 Addition und Subtraktion

Für die Addition bzw. Subtraktion von komplexen Zahlen werden die Realteile und die Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert.

Beispiel: *Es sind die komplexen Zahlen $z_1 = 5 - 7i$ und $z_2 = 4 + 3i$ gegeben, und es soll $z_1 + z_2$ und $z_1 - z_2$ berechnet werden.*

Summe: $z_1 + z_2 = (5 - 7i) + (4 + 3i) = 9 - 4i$

Differenz: $z_1 - z_2 = (5 - 7i) - (4 + 3i) = 5 - 7i - 4 - 3i = 1 - 10i$ □

2.2 Multiplikation

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden die Klammern wie gewohnt multipliziert und das Ergebnis zusammengefasst. Es sollen am Ende keine Potenzen von i vorkommen.

Beispiel: *Es soll das folgende Produkt berechnet und möglichst weit vereinfacht werden*

$$(3 - 2i) \cdot (4 + i) = 12 + 3i - 8i - 2i^2 = 12 - 5i - 2 \cdot (-1) = 14 - 5i$$

□

2.3 Potenzen (mit natürlichem Exponent)

Beim Potenzieren von komplexen Zahlen werden die binomischen Formeln verwendet. Auch hier sollen im Endergebnis keine Potenzen von i vorkommen.

Beispiel: *Es soll der nachfolgende Term so weit wie möglich vereinfacht werden.*

$$(3 + 2i)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2i + 3 \cdot 3 \cdot \underbrace{(2i)^2}_{4 \cdot (-1)} + \underbrace{(2i)^3}_{8 \cdot (-i)} = 27 + 54i - 36 - 8i = -9 + 46i$$

□

2.4 Division

Bei der Division von komplexen Zahlen soll das Ergebnis ebenfalls die Form $a + bi$ haben, d. h. insbesondere, dass im Nenner keine imaginäre Einheit mehr vorkommen soll.

Damit der Nenner reell wird, erweitert man den Bruch mit der zum Nenner komplex konjugierten Zahl. Anschließend wird so weit wie möglich vereinfacht und das Ergebnis in die Form $a + bi$ gebracht.

Beispiel: *Es soll der folgende Quotient berechnet werden.*

$$\frac{5+4i}{3+i} = \frac{5+4i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{15-5i+12i-4i^2}{9-i^2} = \frac{19+7i}{10} = 1{,}9+0{,}7i$$

□

Um das Produkt im Nenner möglichst schnell zu ermitteln, kann die Eigenschaft $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ verwendet werden (siehe Seite 4).

2.5 Quadratwurzel

Dieser Abschnitt sollte erst behandelt werden, wenn die Lösungsformel für quadratische Gleichungen bekannt ist. Man kann diese in folgendem Skriptum nachlesen:

`https://mathe.zone/data/skripten/quadratische-gleichungen.pdf` (Kapitel 3)

Beim Berechnen der Quadratwurzel einer komplexen Zahl z werden folgende Schritte befolgt:

1. Das Ergebnis soll die Form $a + bi$ haben, daher schreibt man $\sqrt{z} = a + bi$.
2. Durch beidseitiges Quadrieren erhält man $z = a^2 + 2abi - b^2$.
3. Daraus entstehen zwei Gleichungen, nämlich $\text{Re}(z) = a^2 - b^2$ und $\text{Im}(z) = 2ab$.
4. Durch Lösen dieses Gleichungssystems können a und b berechnet werden.

Beispiel: *Es soll $\sqrt{5+12i}$ berechnet werden.*

Da das Ergebnis die Form $a+bi$ haben soll, kann man die Gleichung $\sqrt{5+12i} = a+bi$ aufstellen, wobei a und b bestimmt werden müssen. Durch beidseitiges Quadrieren erhält man folgendes Resultat:

$$5 + 12i = a^2 + 2abi - b^2$$

Für die Realteile der linken und der rechten Seite gilt die Gleichung $5 = a^2 - b^2$ und für die Imaginärteile ergibt sich $12 = 2ab$. Formt man die zweite Gleichung nach b um, so erhält man $b = \frac{12}{2a} = \frac{6}{a}$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man eine sogenannte biquadratische Gleichung, welche folgendermaßen gelöst wird:

$$\begin{aligned} 5 &= a^2 - \tfrac{36}{a^2} \\ 5a^2 &= a^4 - 36 \\ 0 &= a^4 - 5a^2 - 36 \end{aligned}$$

Für a^2 erhält man die Lösungen 9 und -4. Da a eine reelle Zahl sein muss, und das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist, kann nur $a^2 = 9$ gelten. Somit ist $a = \pm 3$ und $b = \frac{6}{a} = \pm 2$. Die Endergebnisse lauten somit

$$3 + 2i \quad \text{und} \quad -3 - 2i.$$

□

3 Polarform

Neben der bisher behandelten kartesischen Form gibt es mit der Polarform noch eine weitere Möglichkeit, um komplexe Zahlen darzustellen. Diese ermöglicht es, gewisse Rechnungen effizienter durchzuführen. Für das Verständnis dieses Kapitels werden grundlegende Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen sowie die Kenntnis der Eulerschen Zahl vorausgesetzt.

3.1 Umrechnung

In der Polarform wird komplexe Zahl nicht durch ihren Real- und Imaginärteil beschrieben, sondern durch den Abstand r vom Ursprung (Betrag) und den Winkel φ, den sie mit der positiven reellen Achse einschließt (gemessen in Radiant). Für den Winkel wird zur eindeutigen Darstellung meistens $-\pi < \varphi \leq \pi$ festgelegt.

Um die komplexe Zahl z von der kartesischen Form $a + bi$ in die Polarform $r \cdot e^{\varphi i}$ umzurechnen, gelten folgende Formeln:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{und} \qquad \varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{a}{r}), & \text{falls } b \geq 0 \\ -\arccos(\frac{a}{r}), & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

Beispiel: *Es soll die Zahl $z = 4 + 3i$ in Polarform dargestellt werden.*

Setzt man in die obigen Formeln ein, so erhält man die nachfolgenden Resultate. Da $b > 0$ ist, wird für den Winkel der erste Teil der Formel verwendet.

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad \varphi = \arccos(\tfrac{4}{5}) \approx 0{,}6435$$

Das Ergebnis lautet daher folgendermaßen:

$$z \approx 5 \cdot e^{0{,}6435 \cdot i}$$

□

Die Umrechnung von Polarform in kartesische Form erfolgt vergleichsweise einfach anhand folgender Formeln:

$$\begin{aligned} a &= r \cdot \cos(\varphi) \\ b &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Beispiel: *Es soll die Zahl $z = 3 \cdot e^{2{,}1 \cdot i}$ in die kartesische Form umgerechnet werden.*

Durch Einsetzen in die Formeln erhält man $a = 3 \cdot \cos(2{,}1) \approx -1{,}51$ und $b = 3 \cdot \sin(2{,}1) \approx 2{,}59$. Das Ergebnis lautet daher folgendermaßen:

$$z \approx -1{,}51 + 2{,}59i$$

□

3.2 Rechenregeln

Die Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen in Polarform bringt gegenüber der kartesischen Form keine Vereinfachung, weshalb hier nicht näher darauf eingegangen wird. Jedoch können Zahlen in dieser Darstellungsform sehr einfach multipliziert bzw. dividiert werden. Dazu werden nur die Beträge multipliziert bzw. dividiert und die Winkel addiert bzw. subtrahiert.

Für die Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ gelten folgende Formeln:

$$r = r_1 \cdot r_2 \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Herleitung: Diese Formeln ergeben sich aus den Rechenregeln für die Multiplikation von Potenzen:

$$r_1 \cdot e^{\varphi_1 \cdot i} \cdot r_2 \cdot e^{\varphi_2 \cdot i} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\varphi_1 \cdot i + \varphi_2 \cdot i} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot i}$$

■

Für die Division $\frac{z_1}{z_2}$ gelten folgende Formeln:

$$r = \frac{r_1}{r_2} \qquad\qquad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Herleitung: Diese Formeln ergeben sich aus den Rechenregeln für die Division von Potenzen:

$$\frac{r_1 \cdot e^{\varphi_1 \cdot i}}{r_2 \cdot e^{\varphi_2 \cdot i}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{\varphi_1 \cdot i - \varphi_2 \cdot i} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot i}$$

■

Beispiel: *Es sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2 \cdot e^{0,8 \cdot i}$ und $z_2 = 5 \cdot e^{-1,3 \cdot i}$ gegeben, und es sollen $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ berechnet werden.*

Für die Multiplikation erhält man gemäß der obigen Formeln folgendes Resultat:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{0,8 \cdot i} \cdot 5 \cdot e^{-1,3 \cdot i} = 10 \cdot e^{-0,5 \cdot i}$$

Bei der Division lautet das Ergebnis folgendermaßen:

$$\tfrac{z_1}{z_2} = \tfrac{2 \cdot e^{0,8 \cdot i}}{5 \cdot e^{-1,3 \cdot i}} = 0{,}4 \cdot e^{2,1 \cdot i}$$

□

Auch das Potenzieren von komplexen Zahlen ist in der Polarform sehr viel einfacher als in der kartesischen Form. Anstatt die binomische Formeln anwenden zu müssen, wird lediglich der Betrag r mit dem entsprechenden Exponenten potenziert und der Winkel mit dem Exponenten multipliziert.

Herleitung: Die Herleitung ergibt sich aus den Regeln zum Potenzieren von Potenzen:

$$\left(r \cdot e^{\varphi \cdot i}\right)^n = r^n \cdot \left(e^{\varphi \cdot i}\right)^n = r^n \cdot e^{n \cdot \varphi \cdot i}$$

■

Beispiel: *Es soll die fünfte Potenz von $z = 2 \cdot e^{0,8 \cdot i}$ berechnet werden.*

Man erhält gemäß der obigen Anleitung folgendes Resultat:

$$z^5 = 2^5 \cdot e^{5 \cdot 0,8 \cdot i} = 32 \cdot e^{4 \cdot i}$$

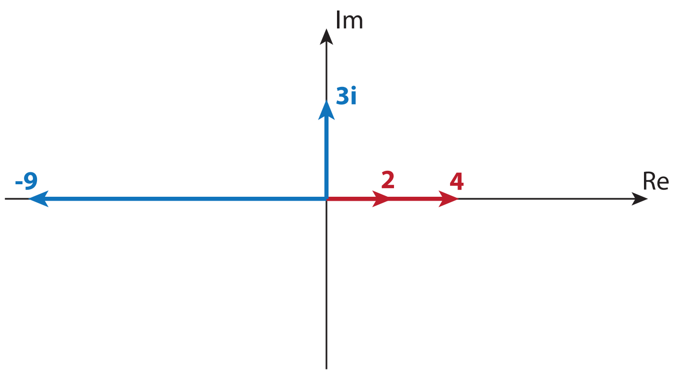
Da jedoch der Winkel nicht im Intervall $(-\pi, \pi]$ liegt, sollte er noch angepasst werden, damit die Ergebnisse einheitlich sind. Dazu wird 2π abgezogen: $4 - 2\pi \approx -2{,}283$. Das Endergebnis lautet daher:

$$z^5 = 32 \cdot e^{-2,283 \cdot i}$$

□

Wie im obigen Beispiel erwähnt, sollte der Winkel zur Sicherstellung der Einheitlichkeit immer im Intervall $(-\pi, \pi]$ liegen. Falls dies nicht der Fall ist, wird so lange 2π addiert bzw. subtrahiert, bis er im genannten Bereich liegt. Da der Winkel 2π einer vollen Umdrehung entspricht, ändert dies an der Position des Punktes im Koordinatensystem nichts.

Mit Hilfe dieser Rechenregel kann man gut veranschaulichen, warum die Quadratwurzel einer negativen reellen Zahl eine positive imaginäre Zahl ist, während die Quadratwurzel einer positiven reellen Zahl weiterhin positiv und reell bleibt. Die nachfolgende Abbildung soll dies für die Zahlen 4 und -9 zeigen.



Die Quadratwurzel entspricht bekanntlich dem Exponent $\frac{1}{2}$. Gemäß der obigen Rechenregel wird daher der Radius mit $\frac{1}{2}$ potenziert und der Winkel mit $\frac{1}{2}$ multipliziert.

- Aus dem Radius 4 wird der Radius 2. Der Winkel der Zahl 4 beträgt 0 und bleibt daher durch die Multiplikation unverändert bei 0. Deshalb ist das Resultat eine positive reelle Zahl.
- Aus dem Radius 9 wird der Radius 3. Der Winkel der Zahl -9 beträgt hingegen π (bzw. 180°). Durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ erhält man den Winkel $\frac{\pi}{2}$ (bzw. 90°). Dies führt zu einer Drehung um 90° im Uhrzeigersinn, die auch in der obigen Abbildung ersichtlich ist. Deshalb ist das Ergebnis eine positive imaginäre Zahl.

3.3 Trigonometrische Form

Die trigonometrische Form ist eine dritte Möglichkeit, um komplexe Zahlen darzustellen. Sie bildet eine Mischung aus kartesischer Form und Polarform, da Realteil und Imaginärteil addiert werden (wie bei der kartesischen Form), jedoch die Polarkoordinaten r und φ verwendet werden (wie bei der Polarform).

$$r \cdot e^{\varphi \cdot i} = \underbrace{r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))}_{\text{trigonometrische Form}} = a + bi$$

Man erhält sie, indem man in der kartesischen Form für a und b die Umrechnungsterme von Seite 6 einsetzt und anschließend r heraushebt.

3.4 Eulersche Identität

Aus der oben behandelten trigonometrischen Form lässt sich die sogenannte Eulersche Formel erstellen. Diese besagt, dass für jede reelle Zahl x folgender Zusammenhang gilt:

$$e^{x \cdot i} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Setzt man in der Eulerschen Formel für x die Zahl π ein, so erhält man folgendes Resultat:

$$e^{\pi \cdot i} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1$$

Durch Umformen ergibt sich schließlich der folgende Zusammenhang:

$$e^{\pi \cdot i} + 1 = 0$$

Man bezeichnet diese Gleichung als Eulersche Identität. Sie ist deshalb von besonderer Bedeutung, weil sie einen Zusammenhang zwischen den fünf wichtigsten Zahlen der Mathematik, nämlich den Zahlen 0 und 1, der Kreiszahl π, der eulerschen Zahl e und der imaginären Einheit i, herstellt.

4 Höhere Wurzeln

Möchte man nicht nur die Quadratwurzel sondern eine beliebige höhere Wurzel einer komplexen Zahl bestimmen, so ist dies nur unter Verwendung der Polarform empfehlenswert. Für die n-te Wurzel einer komplexen Zahl gibt es insgesamt n Lösungen. Diese liegen in der Gaußschen Zahlenebene allesamt gleichmäßig verteilt auf einem Kreisumfang. Zur Bestimmung geht man gemäß folgender Anleitung vor:

1. Falls noch nicht erfolgt, wird die Zahl z in Polarform umgerechnet.
2. Die n Lösungen der n-ten Wurzel von z werden durch folgende Formel berechnet:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \cdot i}$$

   Dabei sind k die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, ..., n-1$.

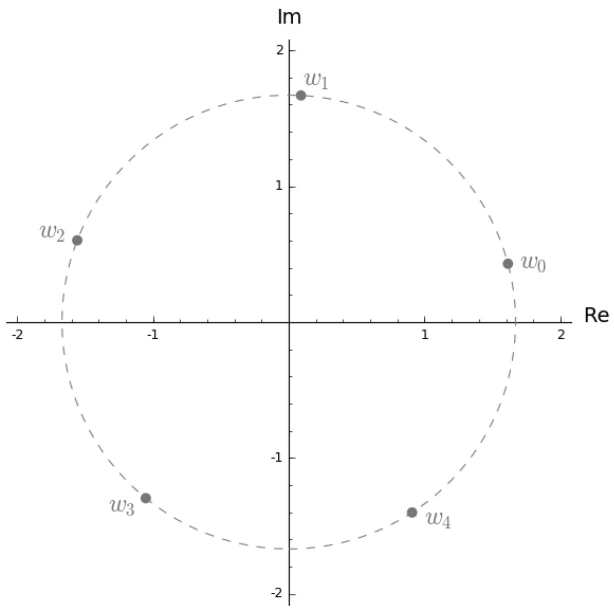
3. Am Ende werden alle Winkel auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ reduziert.

Beispiel: *Gegeben ist die komplexe Zahl* $z = 13 \cdot e^{1{,}3i}$*. Es sollen alle Lösungen von* $\sqrt[5]{z}$ *berechnet und in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden.*

Durch Einsetzen in die obige Formel erhält man:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[5]{13} \cdot e^{\frac{1{,}3+2\pi\cdot 0}{5}\cdot i} \approx 1{,}67 \cdot e^{0{,}26i} \\
w_1 &= \sqrt[5]{13} \cdot e^{\frac{1{,}3+2\pi\cdot 1}{5}\cdot i} \approx 1{,}67 \cdot e^{1{,}517i} \\
w_2 &= \sqrt[5]{13} \cdot e^{\frac{1{,}3+2\pi\cdot 2}{5}\cdot i} \approx 1{,}67 \cdot e^{2{,}773i} \\
w_3 &= \sqrt[5]{13} \cdot e^{\frac{1{,}3+2\pi\cdot 3}{5}\cdot i} \approx 1{,}67 \cdot e^{4{,}030i} \approx 1{,}67 \cdot e^{-2{,}253i} \\
w_4 &= \sqrt[5]{13} \cdot e^{\frac{1{,}3+2\pi\cdot 4}{5}\cdot i} \approx 1{,}67 \cdot e^{5{,}287i} \approx 1{,}67 \cdot e^{-0{,}996i}
\end{aligned}$$

In der folgenden Abbildung sind die fünf Lösungen grafisch dargestellt:



□