

# Ganze Zahlen

In diesem Skriptum werden die grundlegenden Regeln für die Anwendung der vier Grundrechenarten im Zusammenhang mit ganzen Zahlen behandelt. Sie gelten grundsätzlich auch für rationale Zahlen und reelle Zahlen.

## 1 Addition und Subtraktion

Für die Komponenten der Addition und der Subtraktion werden folgende Fachausdrücke verwendet:

**Addition:** Summand + Summand = Summe

**Subtraktion:** Minuend – Subtrahend = Differenz

Zwei betragsmäßig gleiche Zahlen mit entgegengesetztem Vorzeichen nennt man Gegenzahlen. Beispielsweise ist  $-5$  die Gegenzahl von  $+5$  (und umgekehrt).

Für zwei positive ganze Zahlen  $a$  und  $b$  gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{array}{ll} (+a) + (+b) = a + b & (+a) - (+b) = a - b \\ (+a) + (-b) = a - b & (+a) - (-b) = a + b \\ (-a) + (+b) = -a + b & (-a) - (+b) = -a - b \\ (-a) + (-b) = -a - b & (-a) - (-b) = -a + b \end{array}$$

Die einzigen nennenswerten Regeln stehen in der rechten Spalte in der zweiten und in der vierten Zeile. Sie besagen, dass die Subtraktion einer negativen Zahl gleichwertig zur Addition der entsprechenden positiven Zahl ist. Die Ergebnisse stimmen daher mit der ersten bzw. der dritten Zeile der linken Spalte überein.

Für die Addition gelten außerdem zwei weitere Gesetze:

**Kommutativgesetz:** Dieses Gesetz besagt, dass die Reihenfolge der Summanden vertauscht werden kann. Es gilt daher  $a + b = b + a$ .

**Assoziativgesetz:** Durch das Assoziativgesetz wird festgelegt, dass mehrere Additionen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können. Es gilt  $(a+b)+c = a+(b+c)$ . Da beide Möglichkeiten zum selben Ergebnis führen, kann die Klammer auch weggelassen werden.

Für die Subtraktion gelten diese beiden Gesetze nicht, was sich an einfachen Beispielen zeigen lässt:

$$\begin{array}{ll} 10 - 5 = 5 & 5 - 10 = -5 \\ (10 - 5) - 3 = 5 - 3 = 2 & 10 - (5 - 3) = 10 - 2 = 8 \end{array}$$

## 2 Multiplikation und Division

Die Komponenten der Multiplikation und der Division werden folgendermaßen genannt:

**Multiplikation:** Faktor · Faktor = Produkt

**Division:** Dividend : Divisor = Quotient

Auch hier gibt es für zwei positive ganze Zahlen  $a$  und  $b$  insgesamt acht Rechenregeln:

$$\begin{array}{ll} (+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b) & (+a) : (+b) = +(a : b) \\ (+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b) & (+a) : (-b) = -(a : b) \\ (-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b) & (-a) : (+b) = -(a : b) \\ (-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b) & (-a) : (-b) = +(a : b) \end{array}$$

Hier kann man zusammenfassend festhalten, dass das Ergebnis einer Multiplikation bzw. Division zweier Zahlen mit identischem Vorzeichen positiv ist. Stimmen die Vorzeichen nicht überein, so ist das Ergebnis negativ.

Analog zur Addition gelten auch für die Multiplikation das Kommutativ- und das Assoziativgesetz, also  $a \cdot b = b \cdot a$  und  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ . Für die Division gelten diese beiden Gesetze nicht, was sich durch folgende Beispiele zeigen lässt:

$$\begin{array}{ll} 12 : 6 = 2 & 6 : 12 = \frac{1}{2} \\ (24 : 6) : 2 = 4 : 2 = 2 & 24 : (6 : 2) = 24 : 3 = 8 \end{array}$$

Im ersten der beiden obigen Beispiele ist eine weitere Eigenschaft ersichtlich: Die Division ist die einzige der vier Grundrechenarten, welche für die Menge der ganzen Zahlen nicht abgeschlossen ist. Das bedeutet, dass es vorkommen kann, dass der Quotient zweier ganzer Zahlen selbst keine ganze Zahl ist (sondern eine rationale Zahl).

### 3 Division durch Null

Eine Division durch Null ist nicht sinnvoll und sollte daher vermieden werden. Warum das so ist, soll folgendes Beispiel verdeutlichen:

$$\begin{array}{rcl} 4 - 4 & = & 4 - 4 \\ 2 \cdot (2 - 2) & = & (2 + 2) \cdot (2 - 2) \\ 2 & = & (2 + 2) \\ 2 & = & 4 \end{array}$$

Von der ersten zur zweiten Zeile wurde links 2 herausgehoben und rechts die dritte binomische Formel verwendet. Um von der zweiten auf die dritte Zeile zu kommen, wurde auf beiden Seiten durch  $(2 - 2)$  dividiert. Wegen  $2 - 2 = 0$  handelte es sich hier um eine Division durch Null, was letztendlich zu einer falschen Aussage führte.

### 4 Reihenfolge der Rechenoperationen

Bisher wurden nur einzelne Rechenoperationen behandelt. In diesem Abschnitt wird erklärt, wie man vorgeht, wenn mehrere Rechenoperationen hintereinander ausgeführt werden sollen. In diesem Zusammenhang werden Addition und Subtraktion häufig unter dem Begriff „Strichrechnung“ zusammengefasst und Multiplikation und Division werden als „Punktrechnung“ bezeichnet. Insgesamt gelten folgende Regeln:

- Es wird immer zuerst der Wert der innersten Klammer berechnet.
- Punktrechnungen werden immer vor Strichrechnungen durchgeführt.
- Bei mehreren gleichwertigen Rechenoperationen wird immer zuerst links begonnen.

**Beispiel:** Es soll das Ergebnis von  $23 - 17 - 900 : 60 : 3$  ermittelt werden.

Grundsätzlich werden zuerst die Punktrechnungen (also hier die Divisionen) ausgeführt. Da zwei Divisionen aufeinanderfolgen, wird links begonnen:

$$23 - 17 - 900 : 60 : 3 = 23 - 17 - 15 : 3 = 23 - 17 - 5$$

Nun werden die Strichrechnungen (in diesem Fall die beiden Subtraktionen) ausgeführt, wobei erneut links begonnen wird:

$$23 - 17 - 5 = 6 - 5 = 1$$

□

**Beispiel:** Es soll das Ergebnis von  $(17 + 3 \cdot (-2) - (-5)) : ((-4) \cdot (-3) - 4)$  ermittelt werden.

Es wird innerhalb der Klammern begonnen, wobei hier zuerst die Punktrechnungen ausgeführt werden. Außerdem kann  $-(-5)$  durch  $+5$  ersetzt werden.

$$(17 + 3 \cdot (-2) - (-5)) : ((-4) \cdot (-3) - 4) = (17 - 6 + 5) : (12 - 4)$$

Als Nächstes werden innerhalb der Klammern alle Strichrechnungen durchgeführt bis in jeder Klammer nur noch eine einzelne Zahl übrig ist. Zuletzt wird die Division durchgeführt.

$$(17 - 6 + 5) : (12 - 4) = (11 + 5) : 8 = 16 : 8 = 2$$

□

Im Zusammenhang mit Klammern kann in bestimmten Fällen auch das Distributivgesetz verwendet werden. Dieses lautet folgendermaßen:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Dieses Gesetz ist aber nur im Zusammenhang mit Variablen wichtig. Für ganze Zahlen ist es praktischer, zuerst die Summe innerhalb der Klammer zu berechnen und anschließend die Multiplikation durchzuführen.

## 5 Der Betrag

Der Betrag einer Zahl  $x$  entspricht dem reinen Zahlenwert dieser Zahl. Auf der Zahlengerade handelt es sich dabei um den Abstand der Zahl vom Ursprung. Man verwendet für den Betrag der Zahl  $x$  die Schreibweise  $|x|$ .

Beim Rechnen werden Betragsstriche wie Klammern behandelt. Man berechnet daher zuerst den Wert im Inneren. Im Gegensatz zur Klammer wird der Wert jedoch anschließend gegebenenfalls positiv gemacht. Ein häufiger Fehler ist, dass gleich zu Beginn alle Zahlen im Inneren der Betragsstriche positiv gemacht werden. Dies ist jedoch erst möglich, wenn nur noch eine einzige Zahl innerhalb der Betragsstriche steht.

**Beispiel:** Es soll das Ergebnis von  $3 \cdot (5 - 7) - |7 - 2 \cdot (11 - 6)|$  ermittelt werden.

Im ersten Schritt werden die Werte innerhalb der beiden Klammern berechnet.

$$3 \cdot (5 - 7) - |7 - 2 \cdot (11 - 6)| = 3 \cdot (-2) - |7 - 2 \cdot 5|$$

Als Nächstes wird innerhalb der Betragsstriche soweit vereinfacht, bis nur noch eine Zahl übrig ist. Zusätzlich kann auch bereits die Multiplikation  $3 \cdot (-2)$  ausgeführt werden.

$$3 \cdot (-2) - |7 - 2 \cdot 5| = -6 - |7 - 10| = -6 - |-3|$$

Innerhalb der Betragsstriche steht eine negative Zahl. Diese wird durch Anwenden des Betrages positiv.

$$-6 - |-3| = -6 - 3 = -9$$

□