Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen beschreibt. Im Gegensatz zu „gewöhnlichen“ Gleichungen ist die Lösung von Differentialgleichungen keine Zahl sondern eine Funktion.

1 Grundbegriffe

Es ist üblich, in Differentialgleichungen nicht $f(x), f'(x), ...$ zu schreiben, sondern $y, y', ...$. Dadurch erhöht sich auch die Übersichtlichkeit. Es darf jedoch nicht außer Acht gelassen werden, dass die Variable y für eine Funktion steht, welche von x abhängig ist.

Um sich ein etwas besseres Bild dieses Themas machen zu können, wird nachfolgend ein Beispiel einer einfachen Differentialgleichung vorgestellt:

$$y' = 3y$$

Gesucht ist hier eine Funktion, deren Ableitung dem Dreifachen der Funktion selbst entspricht. Falls man sich daran erinnert, dass sich die Exponentialfunktion $e^{k \cdot x}$ durch das Bilden der Ableitung nur um einen Faktor ändert, erkennt man möglicherweise, dass $y = e^{3x}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

Ob es noch weitere Lösungen gibt und wie man derartige Lösungen systematischer finden kann, wird in den nachfolgenden Kapiteln erklärt. Die Lösungsverfahren hängen jedoch stark von der Struktur der Differentialgleichung ab. Daher werden nun einige Unterscheidungsmerkmale vorgestellt.

1.1 Klassifizierung

Anhand der nachfolgend vorgestellten Merkmale kann jede Differentialgleichung bestimmten Klassen zugeordnet werden. Es ist dabei wichtig, diese Zuordnung durchführen zu können, da die geeignete Lösungsstrategie davon abhängig ist.

1.1.1 Ordnung von Differentialgleichungen

Unter der Ordnung einer Differentialgleichung versteht man die höchste vorkommende Ableitung.

Differentialgleichung 1. Ordnung: $y' = 3y$
Differentialgleichung 2. Ordnung: $2y'' + 3y' - 5y = 0$

Anmerkung: Ab der dritten bzw. spätestens ab der vierten Ableitung wird anstelle der Striche die Notation $y^{(n)}$ verwendet. Beispielsweise steht $y^{(5)}$ für die fünfte Ableitung der Funktion y. Die Klammern sind dabei wichtig, um diesen Ausdruck von der fünften Potenz y^5 der Funktion y zu unterscheiden.

1.1.2 Grad von Differentialgleichungen

Der Grad einer Differentialgleichung entspricht der höchsten vorkommenden Summe aller Exponenten von Funktion und Ableitungen innerhalb eines Summanden. Dies soll durch die nachfolgenden vier Beispiele verdeutlicht werden, wobei der entscheidende Summand jeweils unterstrichen ist.

Differentialgleichung 2. Grades: $\underline{(y')^2} + 2y = 5$

Differentialgleichung 3. Grades: $(y'')^2 - \underline{2 \cdot (y')^3} - 5y = 2$

Differentialgleichung 3. Grades: $\underline{4y' \cdot y^2} - 2y = 5$

Differentialgleichung 4. Grades: $y'' - \underline{3 \cdot (y')^2 \cdot y^2} + 3y = 0$

1.1.3 Lineare und nichtlineare Differentialgleichungen

Differentialgleichungen mit Grad 1 nennt man lineare Differentialgleichungen. Das bedeutet, es kommen die Funktion und alle ihre Ableitungen nur in der ersten Potenz vor und gibt es keine Produkte aus Funktion und Ableitung. In allen anderen Fällen handelt es sich um nichtlineare Differentialgleichungen.

$2y' + x \cdot y = 3x^2$ ... linear

$(y'')^2 + 4y' - 3y = 0$ ... nichtlinear (weil y'' die Hochzahl 2 besitzt)

$y \cdot y' + 3y = 2x$ ... nichtlinear (weil das Produkt $y \cdot y'$ vorkommt)

1.1.4 Homogene und inhomogene Differentialgleichungen

Besitzt eine lineare Differentialgleichung nur Summanden, welche die Funktion y oder eine ihrer Ableitungen enthalten, so spricht man von einer homogenen Differentialgleichung. Nachfolgend ein paar Beispiele für homogene Differentialgleichungen:

$$y' = 3y \qquad\qquad y'' + 2y = 0 \qquad\qquad 3x \cdot y = y'$$

Gibt es zusätzlich noch einen Summanden, der weder y noch eine Ableitung von y enthält, so handelt es sich um eine inhomogene Differentialgleichung. Den Summanden bezeichnet man häufig als Störfunktion und isoliert ihn auf einer Seite der Gleichung. Man kann dafür den Ausdruck $s(x)$ verwenden. Der Name stammt daher, dass dieser Summand bei physikalischen Vorgängen häufig die äußeren Einflüsse (Störungen) beschreibt.

$y'' + 3y' - y = 2$ mit der Störfunktion $s(x) = 2$

$y'' + 3y + 4x = 0$ mit der Störfunktion $s(x) = -4x$

$y' + 2y = \sin(x)$ mit der Störfunktion $s(x) = \sin(x)$

Anmerkung: Bei nichtlinearen Differentialgleichungen wird eine Unterscheidung von homogenen und inhomogenen Differentialgleichungen nicht empfohlen. Beispielsweise ist es bei der Differentialgleichung $y' + (x + y)^3 = 0$ nicht sehr sinnvoll, von einer homogenen Gleichung zu sprechen, da diese durch Anwenden der binomischen Formel eine Störfunktion erhalten würde.

1.1.5 Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Bei einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten besitzen alle Summanden, die y bzw. eine Ableitung von y enthalten, höchstens einen konstanten Faktor. Es kommt jedoch keinesfalls die unabhängige Variable x darin vor. Nachfolgend werden ein paar Beispiele für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten aufgelistet:

$2y'' + 5y' - 8y = \sin(x)$

$y'' + r \cdot y' - 2s \cdot y = 0$

$4y'' - 2y' = 12y + 5$

1.1.6 Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen

Ist die gesuchte Funktion nur von einer Variable abhängig, so spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Dies war in allen bisherigen Beispielen der Fall.

Ist die gesuchte Funktion jedoch von mehreren Variablen abhängig, so handelt es sich um partielle Differentialgleichungen. Es muss in diesem Fall auch immer angegebenen werden, nach welcher Variable abgeleitet wird. Dazu wird die Schreibweise $\frac{\partial y}{\partial x}$ verwendet. Nachfolgend wird ein physikalisches Beispiel einer partiellen Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Es handelt sich dabei um die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung (Diffusionsgleichung), wobei $u(x,t)$ die Temperatur am Ort x und zur Zeit t ist.

1.2 Allgemeine Lösung

Ähnlich wie beim unbestimmten Integral entstehen beim Lösen von Differentialgleichungen freie Parameter. Die Anzahl der freien Parameter entspricht dabei der Ordnung der Differentialgleichung. Als allgemeine Lösung einer Differentialgleichung bezeichnet man die Menge aller Funktionen, welche Lösung dieser Differentialgleichung sind.

Beispiel: *Es soll die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' = 4$ bestimmt werden.*

Durch beidseitiges Integrieren erhält man $y' = 4x + c_1$. Wiederholt man diesen Schritt, so ergibt sich als allgemeine Lösung $y = 2x^2 + c_1 \cdot x + c_2$. Für die freien Parameter c_1 und c_2 können beliebige Zahlen eingesetzt werden. □

Anmerkung: Beim beidseitigen Integrieren entsteht eigentlich auf jeder Seite ein freier Parameter. Man kann diese Parameter jedoch auf einer Seite zusammenfassen, um die weitere Rechnung zu vereinfachen.

1.3 Spezielle Lösung

Unter der speziellen Lösung (auch partikuläre Lösung genannt) einer Differentialgleichung versteht man ein eindeutig bestimmtes Element der allgemeinen Lösung. Das bedeutet, alle freien Parameter wurden durch konkrete Zahlen ersetzt. Um diese Zahlen bestimmen zu können, sind Zusatzinformationen erforderlich. Die Anzahl der notwendigen Zusatzinformationen entspricht der Anzahl der freien Parameter und somit der Ordnung der Differentialgleichung.

Es gibt dabei zwei Arten von Zusatzinformationen:

- Beziehen sich alle Informationen auf dieselbe Stelle (z. B. $y(1) = 3$ und $y'(1) = -2$), so spricht man von Anfangsbedingungen bzw. einer Anfangswertaufgabe.
- Ist zu verschiedenen Stellen jeweils derselbe Wertetyp bekannt (z. B. der Funktionswert y oder der Wert der 1. Ableitung y'), so spricht man von Randbedingungen bzw. einer Randwertaufgabe.

Beispiel: *Es soll anhand der Anfangsbedingungen $y(2) = 1$ und $y'(2) = -3$ die spezielle Lösung der Differentialgleichung aus dem Beispiel von Abschnitt 1.2 bestimmt werden.*

Aus dem ursprünglichen Beispiel sind $y' = 4x + c_1$ und $y = 2x^2 + c_1 \cdot x + c_2$ bekannt.

Aus der ersten Gleichung kann durch Einsetzen der Anfangsbedingung $y'(2) = -3$ der freie Parameter c_1 bestimmt werden. Dazu muss die Gleichung $-3 = 4 \cdot 2 + c_1$ gelöst werden, was zu $c_1 = -11$ führt.

Wird nun c_1 und die Anfangsbedingung $y(2) = 1$ in die zweite Gleichung eingesetzt, so erhält man $1 = 2 \cdot 2^2 + (-11) \cdot 2 + c_2$. Daraus folgt $c_2 = 15$.

Die spezielle Lösung der Differentialgleichung lautet daher $y = 2x^2 - 11x + 15$. □

2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Kapitel werden Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung erläutert. Gemäß Abschnitt 1.1.1 versteht man unter der Ordnung die höchste vorkommende Ableitung. Es kommen somit in diesem Kapitel ausschließlich Differentialgleichungen vor, die nur eine 1. Ableitung enthalten. Aus Abschnitt 1.1.3 ist bekannt, dass in linearen Differentialgleichungen keine Produkte der Funktion bzw. der Ableitungen vorkommen. Somit ist die allgemeinste Form der hier behandelten Differentialgleichungen folgende:

$$\tilde{f}(x) \cdot y' + \tilde{g}(x) \cdot y = \tilde{s}(x)$$

Mittels Division durch $\tilde{f}(x)$ kann jedoch immer die folgende Form erreicht werden:

$$y' + g(x) \cdot y = s(x)$$

2.1 Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Ist die Störfunktion $s(x) = 0$, so handelt es sich um eine homogene Differentialgleichung (siehe Abschnitt 1.1.4). Die Differentialgleichung reduziert sich somit auf die folgende Form:

$$y' + g(x) \cdot y = 0$$

Differentialgleichungen dieser Gestalt können durch das sogenannte „Trennen der Variablen“ gelöst werden. Dazu werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Im ersten Schritt wird y' durch den äquivalenten Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ ersetzt.
2. Anschließend wird die Gleichung so umgeformt, dass y und dy auf einer Seite und $g(x)$ und dx auf der anderen Seite stehen.
3. Jetzt wird auf beiden Seiten integriert und die Integrationskonstanten auf einer Seite zusammengefasst.
4. Die entstehende Gleichung wird so umgeformt, dass y auf einer Seite alleine steht. Es handelt sich dabei um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
5. Falls erforderlich, wird mit einer geeigneten Bedingung die spezielle Lösung ermittelt.

Beispiel: *Es soll die Differentialgleichung $y' + y \cdot \sin(x) = 0$ mit $y'(1) = -2$ gelöst werden.*

Zunächst wird y' durch $\frac{dy}{dx}$ ersetzt. Man erhält die Gleichung $\frac{dy}{dx} + y \cdot \sin(x) = 0$. Durch Trennen der Variablen ergibt sich $\frac{1}{y} \cdot dy = -\sin(x) \cdot dx$. Integriert man nun beide Seiten, so entsteht folgende Gleichung (wobei die Integrationskonstanten rechts zusammengefasst werden):

$$\ln(|y|) = \cos(x) + \tilde{c}$$

Durch Anwenden der Exponentialfunktion wird der Logarithmus auf der linken Seite aufgehoben. Außerdem wird die entstehende Potenz auf der rechten Seite aufgespaltet:

$$|y| = e^{\cos(x)+\tilde{c}} = e^{\cos(x)} \cdot e^{\tilde{c}}$$

Statt $e^{\tilde{c}}$ kann man eine neue Konstante c einführen. Da $e^{\cos(x)}$ immer positiv ist und durch den freien Parameter c das Vorzeichen ohnehin unbestimmt ist, können die Betragsstriche auf der linken Seite weggelassen werden. Man erhält folgende allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y = c \cdot e^{\cos(x)}$$

Es wird nun anhand der Nebenbedingung $y'(1) = -2$ der freie Parameter c bestimmt. Für die Ableitung erhält man $y' = -c \cdot \sin(x) \cdot e^{\cos(x)}$. Durch Einsetzen ergibt sich $-2 = -c \cdot \sin(1) \cdot e^{\cos(1)}$, was letztendlich auf $c \approx 1{,}38465$ führt. Die spezielle Lösung der Differentialgleichung lautet somit $y \approx 1{,}38465 \cdot e^{\cos(x)}$. □

2.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die allgemeine Form $a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = s(x)$. Mittels Division durch a_1 kann sie auf folgende Gestalt reduziert werden:

$$y' + a \cdot y = \tilde{s}(x)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung setzt sich aus zwei Teilen zusammen, nämlich der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y' + a \cdot y = 0$ und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Es gilt also folgende Formel:

$$y = y_h + y_s$$

Nachfolgend wird zunächst beschrieben, wie man die Lösung y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ermittelt und anschließend wird auf die Störfunktion $s(x)$ und das Auffinden einer speziellen Lösung y_s der inhomogenen Gleichung eingegangen.

2.2.1 Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + a \cdot y = 0$ lautet folgendermaßen:

$$y = c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Herleitung: Durch Trennen der Variablen kann man $\frac{dy}{dx} + a \cdot y = 0$ umformen zu $\frac{1}{y}\,dy = -a\,dx$. Beidseitiges Integrieren führ zur Gleichung $\ln(|y|) = -ax + \tilde{c}$. Indem man die Exponentialfunktion anwendet, erhält man folgendes Resultat:

$$|y| = e^{-ax+\tilde{c}} = e^{-ax} \cdot e^{\tilde{c}} = c \cdot e^{-ax}$$

Dabei wurde $e^{\tilde{c}}$ durch eine neue Konstante c ersetzt. Da e^{-ax} immer positiv ist und das Vorzeichen des Terms ohnehin durch den freien Parameter c festgelegt werden kann, können die Betragsstriche weggelassen werden, was letztendlich zur oben genannten Formel führt. ■

Beispiel: *Es soll die Differentialgleichung $3y' - 12y = 0$ mit der Bedingung $y(0) = 3$ gelöst werden.*

Zunächst muss die Differentialgleichung durch 3 dividiert werden, um die oben genannte Form zu erhalten. Das Ergebnis lautet $y' - 4y = 0$. Gemäß der Formel ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung $y = c \cdot e^{4x}$.

Durch Einsetzen der Bedingung $y(0) = 3$ erhält man $3 = c \cdot e^{4 \cdot 0} = c \cdot 1 = c$. Somit lautet die spezielle Lösung der gegebenen Differentialgleichung $y = 3 \cdot e^{4x}$. □

2.2.2 Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Das Auffinden einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung hängt von der Art der Störfunktion ab. Die nachfolgende Auflistung zeigt für einige wichtige Funktionstypen den passenden Ansatz, wobei für die Parameter des Ansatzes jeweils griechische Buchstaben verwendet werden, um keine Konflikte mit bereits genannten Formeln zu erzeugen.

Konstante Funktion: Entspricht die Störfunktion einer Konstanten, so lautet der Ansatz $y_s = \alpha$. Es handelt sich dabei um einen Sonderfall der weiter unten genannten Polynomfunktion.

Lineare Funktion: Entspricht die Störfunktion einer linearen Funktion $s(x) = k \cdot x + d$, so lautet der Ansatz $y_s = \alpha \cdot x + \beta$. Es handelt sich dabei um einen Sonderfall der weiter unten genannten Polynomfunktion.

Polynomfunktionen: Handelt es sich bei der Störfunktion um ein Polynom mit Grad n, so ist der Ansatz ebenfalls ein Polynom dieses Grades, also $y_s = \alpha_n \cdot x^n + ... + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0$. Auch wenn in der Störfunktion nicht alle Exponenten vorkommen, müssen diese im Ansatz berücksichtigt werden.

Winkelfunktionen: Hat die Störfunktion die Form $s(x) = u \cdot \sin(\omega \cdot x) + v \cdot \cos(\omega \cdot x)$, so wird als Ansatz $y_s = \alpha \cdot \sin(\omega \cdot x) + \beta \cdot \cos(\omega \cdot x)$ verwendet. In der Störfunktion müssen nicht beide Winkelfunktionen vorkommen, da u bzw. v auch den Wert 0 haben können. Falls in der Störfunktion beide Winkelfunktionen vorkommen, muss ω jedoch in beiden Termen gleich sein.

Exponentialfunktion: Hat die Störfunktion die Form $s(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$, so entscheidet der Koeffizient a der Differentialgleichung $y' + a \cdot y = s(x)$ über den Ansatz. Folgende Fälle sind zu unterscheiden:

$$y_s = \begin{cases} \alpha \cdot e^{k \cdot x} & \text{falls } a \neq k \\ \alpha \cdot x \cdot e^{k \cdot x} & \text{falls } a = k \end{cases}$$

Die Vorgehensweise für das Auffinden der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung sieht folgendermaßen aus:

- Es wird gemäß Abschnitt 2.2.1 die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung bestimmt.
- Es wird aus obiger Auflistung der zur Störfunktion $s(x)$ passende Ansatz für die spezielle Lösung y_s der inhomogenen Gleichung ausgewählt.
- Es wird die erste Ableitung des Ansatzes bestimmt, also y_s'.
- Es werden die Funktionsterme von y_s und y_s' anstelle von y und y' in die ursprüngliche Differentialgleichung eingesetzt.
- Durch einen sogenannten Koeffizientenvergleich werden alle freien Parameter bestimmt.
- Es wird mittels $y_h + y_s$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erstellt.

Beispiel: *Es soll die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' + 3y = 17 \cdot \sin(5x)$ bestimmt werden.*

Im ersten Schritt wird die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' + 3y = 0$ ermittelt. Diese lautet gemäß der oben genannten Formel $y_h = c \cdot e^{-3x}$.

Da es sich bei der Störfunktion $s(x) = 17 \cdot \sin(5x)$ um eine Winkelfunktion handelt, lautet der Ansatz für die spezielle Lösung $y_s = \alpha \cdot \sin(5x) + \beta \cdot \cos(5x)$. Von diesem Ansatz wird die Ableitung berechnet. Man erhält $y_s' = 5\alpha \cdot \cos(5x) - 5\beta \cdot \sin(5x)$.

Als nächstes werden y_s und y_s' in die ursprüngliche Differentialgleichung eingesetzt. Man erhält folgendes Resultat:

$$5\alpha \cdot \cos(5x) - 5\beta \cdot \sin(5x) + 3 \cdot (\alpha \cdot \sin(5x) + \beta \cdot \cos(5x)) = 17 \cdot \sin(5x)$$

Beim sogenannten Koeffizientenvergleich werden aus den Koeffizienten des Terms $\sin(5x)$ und des Terms $\cos(5x)$ jeweils eine Gleichung gebildet. Man erhält dadurch folgendes lineares Gleichungssystem mit den Variablen α und β:

$$\begin{aligned} -5\beta + 3\alpha &= 17 \\ 5\alpha + 3\beta &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems lautet $\alpha = 1{,}5$ und $\beta = -2{,}5$. Somit ist die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y_s = 1{,}5 \cdot \sin(5x) - 2{,}5 \cdot \cos(5x)$. Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung lautet folgendermaßen:

$$y = c \cdot e^{-3x} + 1{,}5 \cdot \sin(5x) - 2{,}5 \cdot \cos(5x)$$

□

2.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Mit der in diesem Abschnitt erläuterten Methode „Variation der Konstanten“ können lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung gelöst werden. Diese haben folgende Gestalt:

$$y' + g(x) \cdot y = s(x)$$

Im Vergleich zu Abschnitt 2.2 muss diese Gleichung keine konstanten Koeffizienten haben, d. h. im zweiten Summanden der linken Seite darf auch die unabhängige Variable x vorkommen. Da es sich in diesem Abschnitt um eine Verallgemeinerung der im vorherigen Abschnitt behandelten Differentialgleichungen handelt, kann die nachfolgend erläuterte Methode auch für Differentialgleichungen dieses Typs verwendet werden.

Die Methode „Variation der Konstanten“ besteht aus folgenden Schritten:

- Mittels „Trennen der Variablen“ (siehe Abschnitt 2.1) wird die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' + g(x) \cdot y = 0$ gelöst, wodurch man y_h erhält.
- Für die spezielle Lösung y_s der inhomogenen Gleichung verwendet man als Ansatz die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung, ersetzt jedoch die Konstante c durch eine Funktion $c(x)$.
- Es wird die Ableitung y_s' bestimmt.
- In die inhomogene Gleichung werden y_s und y_s' für y und y' eingesetzt. Alle Terme, die $c(x)$ enthalten fallen weg und die entstehende Gleichung wird nach $c'(x)$ umgeformt.
- Durch Integration wird $c(x)$ bestimmt, wobei die dabei entstehende Integrationskonstante weggelassen werden kann, da man nur eine einzige Stammfunktion benötigt.
- Setzt man $c(x)$ in den Ansatz von y_s ein, so erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.
- Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhält man abschließend durch $y = y_h + y_s$.

Beispiel: *Es soll die Differentialgleichung $y' - 3x \cdot y = 5x$ mit $y(0) = 2$ gelöst werden.*

Zunächst wird mittels „Trennen der Variablen“ die zugehörige homogene Differentialgleichung $y' - 3x \cdot y = 0$ gelöst. Aus dem Zwischenresultat $\ln(|y|) = \frac{3}{2} \cdot x^2 + \tilde{c}$ erhält man die folgende allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h = c \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2}$$

Als Ansatz für die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wählt man nun $y_s = c(x) \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2}$. Die Ableitung wird mittels Produktregel bestimmt und lautet folgendermaßen:

$$y_s' = c'(x) \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2} + c(x) \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2} \cdot 3x$$

Durch Einsetzen von y_s und y_s' in die ursprüngliche Differentialgleichung erhält man folgendes Resultat:

$$c'(x) \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2} + c(x) \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2} \cdot 3x - 3x \cdot \left(c(x) \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2}\right) = 5x$$

Der zweite und der dritte Summand fallen auf der linken Seite weg. Die verbleibende Gleichung wurde nach $c'(x)$ umgeformt:

$$c'(x) = 5x \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot x^2}$$

Mit Hilfe der Substitutionsmethode kann $c(x)$ bestimmt werden. Man erhält hierfür folgendes Resultat (wobei die Integrationskonstante weggelassen werden kann):

$$c(x) = -\frac{5}{3} \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot x^2}$$

Somit lautet die spezielle Lösung y_s der inhomogenen Differentialgleichung folgendermaßen:

$$y_s = -\frac{5}{3} \cdot e^{-\frac{3}{2} \cdot x^2} \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2} = -\frac{5}{3}$$

Durch $y = y_h + y_s$ erhält man folgende allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = c \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2} - \frac{5}{3}$$

Der freie Parameter c wird nun durch Einsetzen der Bedingung $y(0) = 2$ berechnet. Man erhält $c = \frac{11}{3}$. Somit lautet die Lösung folgendermaßen:

$$y = \frac{11}{3} \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot x^2} - \frac{5}{3}$$

□

3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

In diesem Kapitel werden Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben. Gemäß Abschnitt 1.1.1 versteht man unter der Ordnung die höchste vorkommende Ableitung. Es werden somit in diesem Kapitel Differentialgleichungen behandelt, die eine 2. Ableitung enthalten. Aus Abschnitt 1.1.3 ist bekannt, dass in linearen Differentialgleichungen keine Produkte der Funktion bzw. der Ableitungen vorkommen. Somit ist die Gestalt der hier behandelten Differentialgleichungen folgende:

$$\tilde{f}(x) \cdot y'' + \tilde{g}(x) \cdot y' + \tilde{h}(x) \cdot y = \tilde{s}(x)$$

Mittels Division durch $\tilde{f}(x)$ kann man folgende Gestalt erreichen:

$$y'' + g(x) \cdot y' + h(x) \cdot y = s(x)$$

3.1 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt handelt es sich bei den Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ der oben genannten allgemeinen Form um konstante Funktionen, d. h. sie enthalten nicht die unabhängige Variable x. Somit haben die hier behandelten Differentialgleichungen folgende Gestalt:

$$y'' + a \cdot y' + b \cdot y = s(x)$$

3.1.1 Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

Zunächst wird die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ bestimmt. Dazu wird die quadratische Gleichung $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ gelöst, welche in diesem Zusammenhang als charakteristische Gleichung bezeichnet wird. Je nach Lösungsfall dieser quadratischen Gleichung ergibt sich folgende allgemeine Lösung:

- Falls es zwei verschiedene reelle Lösungen λ_1 und λ_2 gibt, lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y_h = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$.
- Falls es eine reelle Doppellösung λ gibt, lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y_h = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x}$.

– Falls es zwei komplexe Lösungen $\lambda_{1,2} = \alpha + \beta i$ gibt, lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y_h = c_1 \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x} + c_2 \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$.

Herleitung: Zunächst wird gezeigt, dass für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Summe $c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ ist, wenn y_1 und y_2 Lösungen dieser Differentialgleichung sind. Dazu werden von der Funktion $y_3 = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$ die ersten beiden Ableitungen ermittelt, welche $y_3' = c_1 \cdot y_1' + c_2 \cdot y_2'$ und $y_3'' = c_1 \cdot y_1'' + c_2 \cdot y_2''$ lauten. Setzt man diese in die linke Seite der Differentialgleichung ein, so erhält man folgendes Resultat:

$$c_1 \cdot y_1'' + c_2 \cdot y_2'' + a \cdot (c_1 \cdot y_1' + c_2 \cdot y_2') + b \cdot (c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2) =$$
$$= c_1 \cdot \underbrace{(y_1'' + a \cdot y_1' + b \cdot y_1)}_{=0,\text{ weil } y_1 \text{ eine Lösung ist}} + c_2 \cdot \underbrace{(y_2'' + a \cdot y_2' + b \cdot y_2)}_{=0,\text{ weil } y_2 \text{ eine Lösung ist}} = 0$$

Da das Ergebnis der rechten Seite der Differentialgleichung entspricht, ist bewiesen, dass jede Linearkombination zweier Lösungen der Differentialgleichung $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = 0$ erneut eine Lösung dieser Gleichung darstellt.

Nun wird für die drei Fälle gezeigt, dass es sich bei den beiden Summanden jeweils um eine Lösung der Differentialgleichung handelt. Anhand der obigen Erläuterung ist dann auch jede daraus gebildete Linearkombination eine Lösung, wodurch man eine allgemeine Lösung mit zwei freien Parametern erhält.

Im ersten Fall lauten die beiden Einzellösungen $y_1 = e^{\lambda_1 \cdot x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 \cdot x}$. Die ersten beiden Ableitungen von y_1 lauten $y_1' = \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$ und $y_1'' = \lambda_1^2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$. Durch Einsetzen in die linke Seite der Differentialgleichung erhält man Folgendes:

$$\lambda_1^2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + a \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + b \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} = e^{\lambda_1 \cdot x} \cdot \underbrace{(\lambda_1^2 + a \cdot \lambda_1 + b)}_{=0} = 0$$

Die Klammer hat den Wert 0, da λ_1 eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Auf dieselbe Weise wird nachgewiesen, dass y_2 eine Lösung ist. Somit ist die Linearkombination $c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$ ebenfalls eine Lösung.

Im zweiten Fall lauten die beiden Einzellösungen $y_1 = e^{\lambda \cdot x}$ und $y_2 = x \cdot e^{\lambda \cdot x}$. Der Nachweis, dass y_1 eine Lösung ist, wird analog zum ersten Fall erbracht. Für y_2 werden erneut die ersten beiden Ableitungen berechnet, welche $y_2' = \lambda \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} + e^{\lambda \cdot x}$ und $y_2'' = 2\lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + \lambda^2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x}$ lauten. Durch Einsetzen in die linke Seite der Differentialgleichung erhält man folgendes Resultat:

$$2\lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + \lambda^2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} + a \cdot \left(\lambda \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} + e^{\lambda \cdot x}\right) + b \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} =$$
$$= e^{\lambda \cdot x} \cdot (2\lambda + \lambda^2 \cdot x + a \cdot \lambda \cdot x + a + b \cdot x) = e^{\lambda \cdot x} \cdot \left(x \cdot \underbrace{(\lambda^2 + a \cdot \lambda + b)}_{=0} + \underbrace{2\lambda + a}_{=0}\right) = 0$$

Der erste Term hat den Wert 0, da λ eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Der zweite Term hat den Wert 0, da es sich bei λ um eine Doppellösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ handelt. Somit befindet sich der Scheitelpunkt der zugehörigen quadratischen Funktion an der Stelle λ, weshalb auch die Ableitung $2\lambda + a$ den Wert 0 hat.

Im dritten Fall lauten die beiden Einzellösungen $y_1 = \sin(\beta \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$ und $y_2 = \cos(\beta \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$. Die ersten beiden Ableitungen von y_1 lauten $y_1' = \alpha \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x} + \beta \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$ und $y_1'' = \alpha^2 \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x} - \beta^2 \cdot \sin(\beta \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x} + 2\alpha\beta \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$. Setzt man dies in die linke Seite der Differentialgleichung ein, so erhält man folgendes Resultat, wobei bereits möglichst weit zusammengefasst wurde:

$$e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(\sin(\beta \cdot x) \cdot \underbrace{(\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)}_{=0} + \cos(\beta \cdot x) \cdot \underbrace{(2\alpha\beta + a\beta)}_{=0}\right) = 0$$

Um zu verstehen, warum die beiden Klammern 0 ergeben, wird $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ in die linke Seite der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$ eingesetzt:

$$(\alpha + i\beta)^2 + a \cdot (\alpha + i\beta) + b = \alpha^2 + 2\alpha\beta i + \underbrace{i^2\beta^2}_{=-\beta^2} + a\alpha + a\beta i + b = (\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b) + i \cdot (2\alpha\beta + a\beta)$$

Da λ_1 eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist, müssen Realteil und Imaginärteil des obigen Terms 0 ergeben. Daraus folgen die verwendeten Eigenschaften $\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = 0$ und $2\alpha\beta + a\beta = 0$. Für den Nachweis, dass y_2 eine Lösung der Differentialgleichung ist, geht man analog vor, wobei hier anhand von $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ die passenden Eigenschaften gewonnen werden.

■

Beispiel: *Es soll die Lösung der Differentialgleichung $y'' - 10y' + 29y = 0$ mit den Anfangswerten $y(0) = 2$ und $y'(0) = -1$ ermittelt werden.*

Die charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0$ und deren Lösungen sind $\lambda_{1,2} = 5 \pm 2i$. Gemäß der obigen Aufzählung lautet die allgemeine Lösung daher $y = c_1 \cdot \sin(2x) \cdot e^{5x} + c_2 \cdot \cos(2x) \cdot e^{5x}$.

Es müssen noch die Parameter c_1 und c_2 bestimmt werden. Dafür benötigt man die Ableitung der allgemeinen Lösung, welche mit Hilfe der Produktregel ermittelt wird und folgendermaßen lautet:

$$y' = e^{5x} \cdot (5c_1 \cdot \sin(2x) + 2c_1 \cdot \cos(2x) + 5c_2 \cdot \cos(2x) - 2c_2 \cdot \sin(2x))$$

Setzt man die beiden Anfangswerte in y bzw. y' ein, so erhält man das nachfolgende lineare Gleichungssystem. Zu beachten ist dabei, dass $e^0 = 1$, $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$ ist und somit die meisten Terme wegfallen.

$$2 = c_2 \qquad \text{und} \qquad -1 = 2c_1 + 5c_2$$

Mit der ersten Gleichung ist der Parameter $c_2 = 2$ bereits gegeben und durch Einsetzen in die zweite Gleichung erhält man $c_1 = -\frac{11}{2} = -5{,}5$. Die spezielle Lösung der gegebenen Differentialgleichung lautet daher folgendermaßen:

$$y = 2 \cdot \cos(2x) \cdot e^{5x} - 5{,}5 \cdot \sin(2x) \cdot e^{5x}$$

□

3.1.2 Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 hängt auch hier die Lösung von der Störfunktion $s(x)$ ab. Je nach Typ dieser Funktion wählt man einen anderen Ansatz, wobei nachfolgend einige häufig vorkommende Typen aufgelistet werden:

Polynomfunktionen: Handelt es sich bei der Störfunktion um ein Polynom mit Grad n, so sieht der Ansatz folgendermaßen aus:

$$y_s = \begin{cases} \sigma_n \cdot x^n + ... + \sigma_2 \cdot x^2 + \sigma_1 \cdot x + \sigma_0 & \text{falls } b \neq 0 \\ x \cdot \left(\sigma_n \cdot x^n + ... + \sigma_2 \cdot x^2 + \sigma_1 \cdot x + \sigma_0\right) & \text{falls } b = 0 \text{ und } a \neq 0 \\ x^2 \cdot \left(\sigma_n \cdot x^n + ... + \sigma_2 \cdot x^2 + \sigma_1 \cdot x + \sigma_0\right) & \text{falls } a = b = 0 \end{cases}$$

Die Begründung für die Notwendigkeit der beiden unteren Fälle sieht folgendermaßen aus: Bei $b = 0$ ist eine der beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung ebenfalls 0 und daher enthält die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung mit $c_1 \cdot e^{0 \cdot x} = c_1$ bereits einen konstanten Term. Wenn $a = 0$ und $b = 0$ gilt, dann sind sogar beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung 0. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung enthält daher mit $c_1 \cdot e^{0 \cdot x} = c_1$ und $c_2 \cdot x \cdot e^{0 \cdot x} = c_2 \cdot x$ bereits einen konstanten und einen linearen Term.

Winkelfunktionen: Hat die Störfunktion die Form $s(x) = a \cdot \sin(\omega \cdot x) + b \cdot \cos(\omega \cdot x)$, so entscheiden die Lösungen $\lambda_{1,2}$ der charakteristischen Gleichung über den Ansatz:

$$y_s = \begin{cases} \sigma \cdot \sin(\omega \cdot x) + \tau \cdot \cos(\omega \cdot x) & \text{falls } \lambda_{1,2} \neq \pm\omega i \\ x \cdot (\sigma \cdot \sin(\omega \cdot x) + \tau \cdot \cos(\omega \cdot x)) & \text{falls } \lambda_{1,2} = \pm\omega i \end{cases}$$

Der zweite Fall ist deshalb notwendig, weil für $\lambda_{1,2} = 0 \pm \omega i$ die Lösung der homogenen Gleichung identisch mit dem Ansatz der inhomogenen Gleichung wäre (siehe Seite 8).

In der Störfunktion müssen nicht beide Winkelfunktionen vorkommen, da a bzw. b auch den Wert 0 haben können. Falls in der Störfunktion beide Winkelfunktionen vorkommen, muss ω jedoch in beiden Termen gleich sein.

Exponentialfunktion: Hat die Störfunktion die Form $s(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$, so werden folgende Fälle für die Wahl des passenden Ansatzes unterschieden:

$$y_s = \begin{cases} \sigma \cdot e^{k\cdot x} & \text{falls } \lambda_{1,2} \neq k \\ \sigma \cdot x \cdot e^{k\cdot x} & \text{falls } \lambda_1 = k \text{ und } \lambda_2 = k \\ \sigma \cdot x^2 \cdot e^{k\cdot x} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 = k \end{cases}$$

Beim zweiten Fall ist natürlich ebenso $\lambda_1 = k$ und $\lambda_2 \neq k$ möglich, da die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung keine vorgegebene Reihenfolge haben.

Falls k mit einer Lösung oder beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung übereinstimmt, muss der Ansatz der inhomogenen Gleichung gemäß der obigen Fallunterscheidung modifiziert werden, da er sich von der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (siehe Seite 8) unterscheiden muss.

Die Vorgehensweise für das Auffinden der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung sieht folgendermaßen aus:

- Es wird gemäß Abschnitt 3.1.1 die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen Gleichung bestimmt.
- Es wird aus obiger Auflistung der zur vorliegenden Störfunktion passende Ansatz für die spezielle Lösung y_s der inhomogenen Gleichung übernommen.
- Es werden die ersten beiden Ableitung des Ansatzes bestimmt, also y_s' und y_s''.
- Es werden die Funktionsterme von y_s, y_s' und y_s'' anstelle von y, y' und y'' in die ursprüngliche Differentialgleichung eingesetzt.
- Durch einen sogenannten Koeffizientenvergleich werden alle freien Parameter bestimmt.
- Es wird mittels $y_h + y_s$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erstellt.

Beispiel: *Es soll die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $2y'' + 8y' - 42y = 4 \cdot e^{3x}$ bestimmt werden.*

Im ersten Schritt wird die Gleichung durch 2 dividiert, damit y'' alleine steht. Man erhält die Differentialgleichung $y'' + 4y' - 21y = 2 \cdot e^{3x}$.

Als nächstes wird die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y'' + 4y' - 21y = 0$ bestimmt. Dazu wird die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$ gelöst, was zu $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -7$ führt. Somit erhält man $y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-7x}$.

Da der Term e^{3x} aus der Störfunktion bereits in y_h vorkommt, wird als Ansatz für die spezielle Lösung $y_s = \sigma \cdot x \cdot e^{3x}$ verwendet. Die Ableitungen davon lauten $y_s' = \sigma \cdot e^{3x} + 3\sigma \cdot x \cdot e^{3x}$ und $y_s'' = 6\sigma \cdot e^{3x} + 9\sigma \cdot x \cdot e^{3x}$. Setzt man y_s, y_s' und y_s'' in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, so erhält man folgendes Resultat:

$$6\sigma \cdot e^{3x} + 9\sigma \cdot x \cdot e^{3x} + 4 \cdot (\sigma \cdot e^{3x} + 3\sigma \cdot x \cdot e^{3x}) - 21 \cdot (\sigma \cdot x \cdot e^{3x}) = 2 \cdot e^{3x}$$

Durch Vereinfachen erhält man $10\sigma \cdot e^{3x} = 2 \cdot e^{3x}$. Der Koeffizientenvergleich ergibt $10\sigma = 2$ was letztendlich zu $\sigma = 0{,}2$ führt. Somit ist $y_s = 0{,}2 \cdot x \cdot e^{3x}$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, welche man durch $y = y_h + y_s$ erhält, lautet folgendermaßen:

$$y = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 \cdot e^{-7x} + 0{,}2 \cdot x \cdot e^{3x}$$

□

4 Numerische Lösungsmethoden

Die numerische Mathematik bietet auch für Differentialgleichungen eine Vielzahl an Lösungsverfahren. Diese liefern zwar keine exakten Lösungen, sind jedoch oftmals auch dann einsetzbar, wenn analytische Lösungsverfahren zu aufwendig sind bzw. überhaupt nicht verwendet werden können (beispielsweise wurde in diesem Skriptum kein Verfahren für nichtlineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung vorgestellt). Numerische Verfahren eignen sich auch sehr gut für die näherungsweise Lösung von Differentialgleichungen mittels Computerprogrammen, da ein entsprechender Programmcode relativ einfach erstellt werden kann.

In diesem Kapitel werden zwei Verfahren vorgestellt, mit denen die spezielle Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung bestimmt werden kann, wenn der Anfangswert $(x_0 \mid y_0)$ bekannt ist. Die Differentialgleichung muss dabei in der Form $y' = f(x, y)$ vorliegen. Das heißt, sie wird so umgeformt, dass y' alleine auf der linken Seite steht.

4.1 Eulersches Polygonzugverfahren

Dieses Verfahren wurde 1768 von Leonhard Euler (1707 – 1783) vorgestellt und ist auch unter den Namen „Eulersches Streckenzugverfahren" und „Explizites Euler-Verfahren" bekannt. Man wählt dabei zunächst eine Schrittweite Δx, die angibt, in welchen Abständen die Funktionswerte der Lösungsfunktion berechnet werden sollen. Je kleiner Δx ist, umso genauer wird das Ergebnis normalerweise.

Ausgehend vom Punkt $(x_0 \mid y_0)$ erhält man die weiteren Punkte gemäß folgender Formeln:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \qquad \text{und} \qquad y_{n+1} = y_n + \Delta x \cdot f(x_n, y_n)$$

Die wiederholte Anwendung dieser Formeln führt zu einer Folge von Punkten. Verbindet man diese Punkte, so entsteht ein sogenannter Polygonzug bzw. Streckenzug, woher auch der Name des Verfahrens stammt. Je weiter rechts die Punkte liegen, umso weiter weichen sie üblicherweise von der exakten Lösungsfunktion ab.

Unter folgender Adresse befindet sich eine Excel-Datei, mit welcher dieses Verfahren durchgeführt werden kann: `https://mathe.zone/data/dateien/eulersches-polygonzugverfahren.xlsx`

Beispiel: *Es soll die Lösung der Differentialgleichung $y' + 2y = x$ mit der Bedingung $y(0) = 1$ anhand des Eulerschen Polygonzugverfahrens im Intervall $[0, 1]$ näherungsweise bestimmt werden. Als Schrittweite soll $\Delta x = 0{,}1$ verwendet werden.*

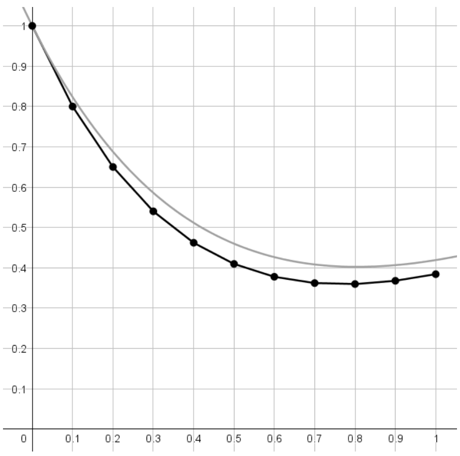
Dazu wird die Gleichung zunächst in die Form $y' = f(x, y)$ gebracht. Man erhält $y' = x - 2y$. Als Anfangswerte sind $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$ gegeben. Ausgehend von diesen Werten müssen nun mit Hilfe der Formeln

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}1 \qquad \text{und} \qquad y_{n+1} = y_n + 0{,}1 \cdot (x_n - 2y_n)$$

zehn weitere Wertepaare berechnet werden, um die obere Intervallgrenze $x = 1$ zu erreichen. Nachfolgende Tabelle listet diese Wertepaare auf:

n	x_n	y_n
0	0,00000	1,00000
1	0,10000	0,80000
2	0,20000	0,65000
3	0,30000	0,54000
4	0,40000	0,46200
5	0,50000	0,40960
6	0,60000	0,37768
7	0,70000	0,36214
8	0,80000	0,35972
9	0,90000	0,36777
10	1,00000	0,38422

Die grafische Darstellung des zugehörigen Polygonzugs wird nachfolgend abgebildet, wobei der Funktionsgraph der exakten Lösungsfunktion $y = 1{,}25 \cdot e^{-2x} + 0{,}5x - 0{,}25$ ebenfalls grau eingezeichnet wurde:



□

4.2 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren (auch vierstufiges Runge-Kutta-Verfahren) ist ein weiteres Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen 1. Ordnung, welches nach den beiden deutschen Mathematikern Carl Runge (1856 – 1927) und Wilhelm Kutta (1867 – 1944) benannt ist. Es liefert bei gleicher Anzahl an Punkten normalerweise deutlich bessere Ergebnisse als das Eulersche Polygonzugverfahren aus Abschnitt 4.1, ist jedoch auch mit einem höheren Rechenaufwand verbunden.

Gegeben ist erneut eine Schrittweite Δx, eine Differentialgleichung 1. Ordnung in der Form $y' = f(x, y)$ und ein Punkt $(x_0 \mid y_0)$ der Lösungsfunktion.

Im ersten Schritt müssen die vier Koeffizienten k_1, k_2, k_3, k_4 gemäß der folgenden Formeln berechnet werden:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + \tfrac{\Delta x}{2}, y_n + k_1 \cdot \tfrac{\Delta x}{2}) \\ k_3 &= f(x_n + \tfrac{\Delta x}{2}, y_n + k_2 \cdot \tfrac{\Delta x}{2}) \\ k_4 &= f(x_n + \Delta x, y_n + k_3 \cdot \Delta x) \end{aligned}$$

Für die Berechnung des nächsten Punktes werden die folgenden beiden Formeln verwendet: Ausgehend vom Punkt $(x_0 \mid y_0)$ erhält man die weiteren Punkte gemäß folgender Formeln:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \qquad \text{und} \qquad y_{n+1} = y_n + \tfrac{\Delta x}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Die wiederholte Anwendung dieser Formeln führt zu einer Folge von Punkten. Verbindet man diese Punkte, so entsteht ein sogenannter Polygonzug bzw. Streckenzug, durch welchen der Funktionsgraph der Lösungsfunktion angenähert wird. Je weiter rechts die Punkte liegen, umso weiter weichen sie üblicherweise von der exakten Lösungsfunktion ab.

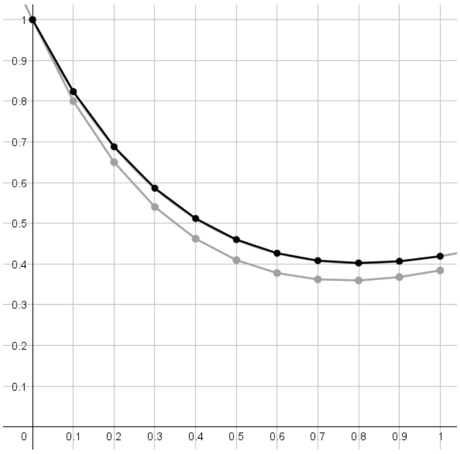
Unter folgender Adresse befindet sich eine Excel-Datei, mit welcher dieses Verfahren durchgeführt werden kann: **`https://mathe.zone/data/dateien/runge-kutta-verfahren.xlsx`**

Beispiel: *Es soll wie bereits in Abschnitt 4.1 die Lösung der Differentialgleichung $y' + 2y = x$ mit der Bedingung $y(0) = 1$ im Intervall $[0, 1]$ näherungsweise bestimmt werden, jedoch dieses Mal mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens. Als Schrittweite soll erneut $\Delta x = 0{,}1$ verwendet werden.*

Zunächst wird die Gleichung in die Form $y' = f(x, y)$ gebracht. Man erhält $y' = x - 2y$. Als Anfangswerte sind $x_0 = 0$ und $y_0 = 1$ gegeben. Ausgehend von diesen Werten erhält man durch Anwenden der obigen Formel für k_1, k_2, k_3, k_4 und anschließendes Einsetzen in die Formeln für x_{n+1} und y_{n+1} folgende Wertepaare:

n	x_n	y_n
0	0,00000	1,00000
1	0,10000	0,82342
2	0,20000	0,68791
3	0,30000	0,58602
4	0,40000	0,51167
5	0,50000	0,45986
6	0,60000	0,42650
7	0,70000	0,40825
8	0,80000	0,40238
9	0,90000	0,40663
10	1,00000	0,41917

Die grafische Darstellung des zugehörigen Polygonzugs wird nachfolgend schwarz abgebildet. Zusätzlich wurde der Funktionsgraph der exakten Lösungsfunktion $y = 1{,}25 \cdot e^{-2x} + 0{,}5x - 0{,}25$ und der Polygonzug des Beispiels aus Abschnitt 4.1 grau eingezeichnet:



Der Polygonzug des Runge-Kutta-Verfahrens ist quasi deckungsgleich mit dem Funktionsgraphen der exakten Lösung, während jener des Eulerschen Polygonzugverfahrens nach einigen Punkten bereits deutliche Abweichungen zeigt. □