

Wein mischen

Quelle: <https://mathe.zone/ausarbeitungen>

Version vom 28. April 2020

Problemstellung

Man stelle sich zwei gleiche Gläser vor. Eines dieser Gläser ist mit einer bestimmten Menge Rotwein gefüllt, das andere mit genauso viel Weißwein. Nun wird ein Löffel Rotwein vom Glas mit dem Rotwein in jenes mit dem Weißwein gegeben. Anschließend wird gut verrührt, sodass man annehmen kann, dass ein homogenes Gemisch entstanden ist. Jetzt wird ein Löffel von jenem Glas, in welchem sich das Gemisch befindet in das Rotweinglas gegeben und wieder gut vermischt.

Die Fragestellung ist nun, ob sich mehr Rotwein im Weißweinglas oder mehr Weißwein im Rotweinglas befindet.

Ausgangslage

Das ursprüngliche Volumen, das sich zu Beginn in jedem Glas befindet, wird mit der Variable g (für Glas) bezeichnet. Das Löffelvolumen wird mit der Variable l (für Löffel) bezeichnet. Jenes Glas, in dem zu Beginn der Rotwein ist, wird mit dem Buchstaben A, das andere mit dem Buchstaben B bezeichnet. Für Rotwein wird die Variable R , für Weißwein die Variable W verwendet. Zu Beginn werden die Inhalte beider Gläser durch folgende Terme beschrieben:

$$\text{Glas A: } g \cdot R + 0 \cdot W$$

$$\text{Glas B: } 0 \cdot R + g \cdot W$$

1. Schritt

Nun wird ein Löffel Rotwein aus dem Rotweinglas in das Weißweinglas gegeben. Dies wirkt sich folgendermaßen auf die Inhalte aus:

$$\text{Glas A: } (g - l) \cdot R + 0 \cdot W$$

$$\text{Glas B: } l \cdot R + g \cdot W$$

In Glas B befindet sich nun ein Gesamtvolumen von $l + g$. Der Anteil des Rotweins beträgt dabei $\frac{l}{l+g}$, der Anteil des Weißweins beträgt $\frac{g}{l+g}$.

2. Schritt

Nimmt man nun einen Löffel aus Glas B, so enthält es die oben beschriebenen Anteile. Das von B nach A transportierte Rotweinvolumen ist daher $l \cdot \frac{l}{l+g}$ und das transportierte Weißweinvolumen beträgt $l \cdot \frac{g}{l+g}$. Auf die Inhalte der beiden Gläser hat dies folgende Auswirkungen:

$$\text{Glas A: } (g - l) \cdot R + 0 \cdot W + \underbrace{l \cdot \frac{l}{l+g} \cdot R + l \cdot \frac{g}{l+g} \cdot W}_{\text{dieser Teil wurde hinzugefügt}} = \left((g - l) + \frac{l^2}{l+g} \right) \cdot R + \frac{l \cdot g}{l+g} \cdot W$$

$$\text{Glas B: } l \cdot R + g \cdot W - \underbrace{l \cdot \frac{l}{l+g} \cdot R - l \cdot \frac{g}{l+g} \cdot W}_{\text{dieser Teil wurde entnommen}} = \left(l - \frac{l^2}{l+g}\right) \cdot R + \left(g - \frac{l \cdot g}{l+g}\right) \cdot W$$

Nun wird zunächst der Rotwein-Term von Glas A vereinfacht:

$$(g-l) + \frac{l^2}{l+g} = \frac{(g-l) \cdot (l+g) + l^2}{l+g} = \frac{g \cdot l + g^2 - l^2 - l \cdot g + l^2}{l+g} = \frac{g^2}{l+g}$$

Der Weißwein-Term von Glas A ist bereits so weit wie möglich vereinfacht. Im nächsten Schritt wird der Rotwein-Term von Glas B umgeformt:

$$l - \frac{l^2}{l+g} = \frac{l \cdot (l+g) - l^2}{l+g} = \frac{l^2 + l \cdot g - l^2}{l+g} = \frac{l \cdot g}{l+g}$$

Abschließend wird der Weißwein-Term von Glas B vereinfacht:

$$g - \frac{l \cdot g}{l+g} = \frac{g \cdot (l+g) - l \cdot g}{l+g} = \frac{g \cdot l + g^2 - l \cdot g}{l+g} = \frac{g^2}{l+g}$$

Ergebnis

Man erhält die folgenden vereinfachten Inhalte:

$$\text{Glas A: } \frac{g^2}{l+g} \cdot R + \frac{l \cdot g}{l+g} \cdot W$$

$$\text{Glas B: } \frac{l \cdot g}{l+g} \cdot R + \frac{g^2}{l+g} \cdot W$$

Es ergibt sich somit, dass durch diesen Mischvorgang letztendlich gleich viel Rotwein ins Weißweinglas gelangt ist, wie Weißwein ins Rotweinglas befördert wurde.