Sitzzuteilungsverfahren

Quelle: `https://mathe.zone/ausarbeitungen`
Version vom 28. April 2020

Das Ziel einer Verhältniswahl ist es, eine beschränkte Anzahl an Sitzen so unter den kandidierenden Parteien aufzuteilen, dass deren Wahlergebnis bestmöglich umgesetzt wird. Das heißt, der Sitzanteil sollte dem Anteil an Stimmen bei der Wahl entsprechen, was durch folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$\frac{\text{Parteistimmen}}{\text{Gesamtstimmen}} = \frac{\text{Parteisitze}}{\text{Gesamtsitze}} \tag{1}$$

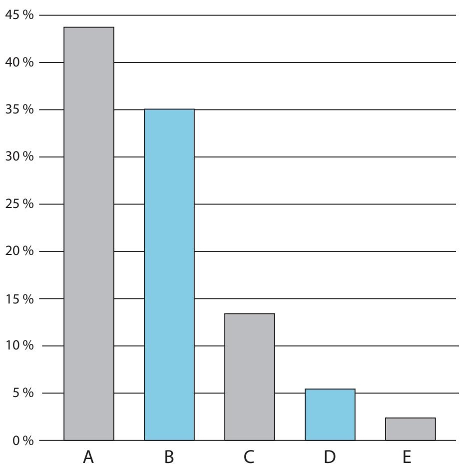
In der Praxis ist dies quasi unmöglich, weshalb auf irgendeine Weise gerundet werden muss. Hierfür gibt es verschiedene Verfahren, von denen die folgenden drei am weitesten verbreitet sind:

- Hare-Niemeyer-Verfahren (auch Hamilton-Verfahren)
- D'Hondt-Verfahren (auch Jefferson-Verfahren)
- Sainte-Laguë-Verfahren (auch Webster-Verfahren)

In Europa sind die erstgenannten Bezeichnungen gebräuchlich. In den Vereinigten Staaten von Amerika werden hauptsächlich die in Klammern angegebenen Bezeichnungen verwendet.

Diese drei Verfahren werden in den folgenden Kapiteln anhand eines fiktiven Wahlergebnisses und einer Gesamtanzahl von 50 Sitzen vorgestellt. Als fiktives Wahlergebnis werden folgende Daten herangezogen:

Partei	Stimmen	Anteil
A	701	43,73 %
B	562	35,06 %
C	215	13,41 %
D	87	5,43 %
E	38	2,37 %
Gesamt	1603	100 %



Häufig wird durch eine explizite Sperrklausel (ein Mindeststimmenanteil) verhindert, dass kleine Parteien einen Sitz erhalten. Es werden daher nachfolgend jeweils die Situationen ohne expliziter Sperrklausel und mit einer expliziten Sperrklausel von 5 % erläutert. Im fiktiven Beispiel wäre Partei E von dieser Sperrklausel betroffen.

Hare-Niemeyer-Verfahren

Dieses Verfahren wurde nach dem britischen Rechtsanwalt Thomas Hare und dem deutschen Mathematiker Horst F. Niemeyer benannt. Zunächst wird Gleichung (1) in die folgende Form gebracht:

$$\text{Parteisitze} = \frac{\text{Parteistimmen} \cdot \text{Gesamtsitze}}{\text{Gesamtstimmen}}$$

Auf diese Weise kann die theoretische Sitzanzahl jeder Partei berechnet werden. Diese ist jedoch fast nie ganzzahlig. Daher wird im ersten Schritt bei jeder Partei abgerundet auf die nächste ganze Zahl. Wenn nicht alle Ergebnisse ganzzahlig waren, muss nun mindestens ein Sitz zu wenig verteilt worden sein. Diese übrig gebliebenen Sitze werden im zweiten Schritt der Reihe nach an jene Parteien vergeben, welche den größten Nachkommarest haben (also einem weiteren Mandat am nächsten sind). Sollte es hier einen Gleichstand geben, so entscheidet das Los.

Im fiktiven Beispiel ergibt sich ohne Sperrklausel folgende Verteilung:

Partei	Stimmen	Anteil	theoretisch	abgerundet	Rest	Zusatz	Sitzverteilung
A	701	43,73 %	21,865	21	865	1	22
B	562	35,06 %	17,530	17	530		17
C	215	13,41 %	6,706	6	706	1	7
D	87	5,43 %	2,714	2	714	1	3
E	38	2,37 %	1,185	1	185		1
Gesamt	1603			47		3	50

Gibt es eine Sperrklausel, so werden zunächst alle Parteien, welche den vorgegebenen Stimmenanteil nicht erreicht haben, aussortiert. Dadurch ändert sich die Gesamtstimmenanzahl und somit auch der Stimmenanteil aller Parteien. Mit diesen neuen Werten wird das oben beschriebene Verfahren nun durchgeführt.

Partei	Stimmen	Anteil	theoretisch	abgerundet	Rest	Zusatz	Sitzverteilung
A	701	44,79 %	22,396	22	396		22
B	562	35,91 %	17,955	17	955	1	18
C	215	13,74 %	6,869	6	869	1	7
D	87	5,56 %	2,780	2	780	1	3
Gesamt	1565			47		3	50

Verwendung findet das Verfahren laut [1] in Dänemark, Italien und Griechenland. Außerdem kommt es bei Landtagswahlen in Bayern, Berlin, Brandenburg, Hessen, Mecklenburg-Vorpommern, Sachsen-Anhalt und Thüringen zur Anwendung.

Das Hare-Niemeyer-Verfahren verhält sich gemäß [1] neutral in Bezug auf die Größe der Parteien, d. h. es bevorzugt weder große noch kleine Parteien. Ein großer Nachteil ist jedoch die Gefahr des sogenannten Alabama-Paradoxons. Es kann nämlich passieren, dass beim selben Wahlergebnis eine Partei einen Sitz verliert, wenn die Gesamtanzahl der Sitze vergrößert wird.

D'Hondt-Verfahren

Bei diesem Verfahren, welches auch als d'Hondtsches Höchstzahlverfahren bekannt ist, werden die Stimmen jeder Partei der Reihe nach durch die natürlichen Zahlen $(1, 2, 3, ...)$ geteilt und die Ergebnisse (die sogenannten Höchstzahlen) in einer Tabelle notiert. Anschließend werden sie in absteigender Reihenfolge den Sitzen zugeteilt bis die Gesamtanzahl an Sitzen erreicht ist.

Die Tabelle des fiktiven Beispiels ist auf Seite 5 links abgebildet. Ohne Sperrklausel würde man folgende Sitzverteilung erhalten:

Partei	A	B	C	D	E
Sitze	22	18	7	2	1

Mit Sperrklausel würde der Sitz von Partei E an Partei A wandern, da diese mit 30,5 die größte nicht berücksichtigte Höchstzahl besitzt. Somit erhält man folgende Sitzverteilung:

Partei	A	B	C	D
Sitze	23	18	7	2

Das d'Hondt-Verfahren erfüllt laut [2] die sogenannte Mehrheitsbedingung. Das bedeutet, dass eine Partei mit einem Stimmenanteil von mindestens 50 % auch mindestens 50 % der Sitze erhält. Es erfüllt jedoch nicht die Minderheitsbedingung. Somit kann auch eine Partei, die weniger als 50 % der Stimmen erhält, 50 % der Sitze erhalten.

Außerdem werden durch das d'Hondt-Verfahren kleine Parteien benachteiligt. Nachfolgend wird ein extremes Beispiel beschrieben, welches an [2] angelehnt wurde: Es werden 10 Sitze vergeben. Partei A erhält 600 Stimmen und acht weitere Parteien erhalten jeweils 50 Stimmen. Nach dem d'Hondt-Verfahren würde Partei A alle 10 Sitze erhalten, da die 10. Höchstzahl $\frac{600}{10}$ noch immer größer als die erste Höchstzahl $\frac{50}{1}$ ist. Im Hare-Niemeyer-Verfahren würde Partei A nur 6 Sitze erhalten und vier der acht kleinen Parteien würden jeweils einen Sitz bekommen.

Heute findet das d'Hondt-Verfahren nur noch selten Anwendung. In Deutschland wird es laut [2] bei Landtagswahlen in Niedersachsen, Sachsen und im Saarland verwendet und in Österreich wird es bei Nationalratswahlen im dritten Ermittlungsverfahren eingesetzt.

Sainte-Laguë-Verfahren

Dieses Verfahren funktioniert im Grunde gleich wie das d'Hondt-Verfahren, jedoch werden die Stimmen hier nicht durch $(1, 2, 3, ...)$ sondern durch $(1, 3, 5, ...)$ geteilt. Eine alternative Variante wäre das Teilen durch $(0.5, 1.5, 2.5, ...)$, was immer zum selben Ergebnis führt.

Die Tabelle des fiktiven Beispiels ist auf Seite 5 rechts abgebildet. Ohne Sperrklausel ergibt sich folgende Verteilung der Sitze:

Partei	A	B	C	D	E
Sitze	22	17	7	3	1

Mit Sperrklausel würde der Sitz von Partei E an Partei B wandern, da diese mit 16,1 die größte nicht berücksichtigte Höchstzahl besitzt. Somit erhält man folgende Sitzverteilung:

Partei	A	B	C	D
Sitze	22	18	7	3

Derzeit wird dieses Verfahren laut [3] und [4] in Deutschland bei Bundestagswahlen sowie bei Landtagswahlen in Bremen, Hamburg, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Baden-Württemberg und Schleswig-Holstein verwendet. Darüber hinaus kommt es laut [4] in Bosnien und Herzegowina, im Irak, im Kosovo, in Lettland, in Norwegen und in Neuseeland zum Einsatz.

In Schweden wird gemäß [3] ein modifiziertes Sainte-Laguë-Verfahren verwendet, bei welchem statt den Teilern $(1, 3, 5, ...)$ die Teiler $(1.2, 3, 5, ...)$ verwendet werden. Auf diese Weise ergibt sich für kleinere Parteien eine größere Hürde, die jedoch noch immer niedriger ist, als beim d'Hondt-Verfahren.

Quellen

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Hare-Niemeyer-Verfahren` (Zugriff: 3. Mai 2019)

[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/D%E2%80%99Hondt-Verfahren` (Zugriff: 3. Mai 2019)

[3] `https://de.wikipedia.org/wiki/Sainte-Lagu%C3%AB-Verfahren` (Zugriff: 3. Mai 2019)

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Webster/Sainte-Lagu%C3%AB_method` (Zugriff: 3. Mai 2019)

Anhang

Höchstzahlen des d'Hondt-Verfahrens

	701	562	215	87	38
1	701,0	562,0	215,0	87,0	38,0
2	350,5	281,0	107,5	43,5	19,0
3	233,7	187,3	71,7	29,0	12,7
4	175,3	140,5	53,8	21,8	9,5
5	140,2	112,4	43,0	17,4	7,6
6	116,8	93,7	35,8	14,5	6,3
7	100,1	80,3	30,7	12,4	5,4
8	87,6	70,3	26,9	10,9	4,8
9	77,9	62,4	23,9	9,7	4,2
10	70,1	56,2	21,5	8,7	3,8
11	63,7	51,1	19,5	7,9	3,5
12	58,4	46,8	17,9	7,3	3,2
13	53,9	43,2	16,5	6,7	2,9
14	50,1	40,1	15,4	6,2	2,7
15	46,7	37,5	14,3	5,8	2,5
16	43,8	35,1	13,4	5,4	2,4
17	41,2	33,1	12,6	5,1	2,2
18	38,9	31,2	11,9	4,8	2,1
19	36,9	29,6	11,3	4,6	2,0
20	35,1	28,1	10,8	4,4	1,9
21	33,4	26,8	10,2	4,1	1,8
22	31,9	25,5	9,8	4,0	1,7
23	30,5	24,4	9,3	3,8	1,7
24	29,2	23,4	9,0	3,6	1,6
Sitze	22	18	7	2	1

Höchstzahlen des Sainte-Laguë-Verfahrens

	701	562	215	87	38
1	701,0	562,0	215,0	87,0	38,0
3	233,7	187,3	71,7	29,0	12,7
5	140,2	112,4	43,0	17,4	7,6
7	100,1	80,3	30,7	12,4	5,4
9	77,9	62,4	23,9	9,7	4,2
11	63,7	51,1	19,5	7,9	3,5
13	53,9	43,2	16,5	6,7	2,9
15	46,7	37,5	14,3	5,8	2,5
17	41,2	33,1	12,6	5,1	2,2
19	36,9	29,6	11,3	4,6	2,0
21	33,4	26,8	10,2	4,1	1,8
23	30,5	24,4	9,3	3,8	1,7
25	28,0	22,5	8,6	3,5	1,5
27	26,0	20,8	8,0	3,2	1,4
29	24,2	19,4	7,4	3,0	1,3
31	22,6	18,1	6,9	2,8	1,2
33	21,2	17,0	6,5	2,6	1,2
35	20,0	16,1	6,1	2,5	1,1
37	18,9	15,2	5,8	2,4	1,0
39	18,0	14,4	5,5	2,2	1,0
41	17,1	13,7	5,2	2,1	0,9
43	16,3	13,1	5,0	2,0	0,9
45	15,6	12,5	4,8	1,9	0,8
47	14,9	12,0	4,6	1,9	0,8
Sitze	22	17	7	3	1