Sichtweite

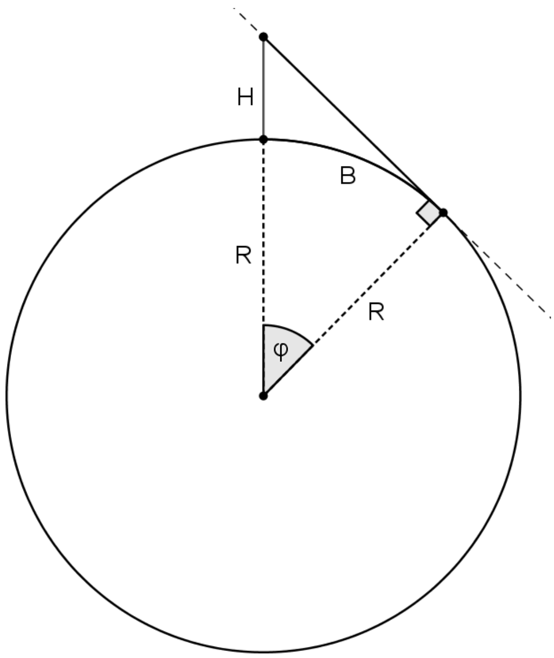
Quelle: `https://mathe.zone/ausarbeitungen`
Version vom 28. April 2020

Problemstellung

Es soll berechnet werden, bis zu welcher Entfernung man auf der Erde sehen kann. Dabei soll davon ausgegangen werden, dass die Erde einer perfekten Kugel entspricht (also sie nicht an den Polen abgeflacht ist) und dass es auf der Erdoberfläche keine Erhebungen und Hindernisse gibt. Als Erdradius wird der mittlere Erdradius herangezogen. Dieser hat laut [1] ungefähr den Wert $R = 6371\,\text{km}$.

Geometrische Lösung

Die Aufgabenstellung kann durch die nachfolgende Abbildung modelliert werden. Zur besseren Übersichtlichkeit ist in dieser Abbildung die Höhe H unverhältnismäßig groß dargestellt. Gesucht ist jene Gerade, welche ausgehend vom Auge des Beobachters die Erdoberfläche tangiert, also in einem Punkt berührt.



Es wird dabei die Eigenschaft verwendet, dass jede Tangente eines Kreises senkrecht (im rechten Winkel) auf den entsprechenden Radius steht. Daraus ergibt sich in der obigen Abbildung ein rechtwinkliges Dreieck. Aus diesem rechtwinkligen Dreieck resultiert der nachfolgende Zusammenhang:

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{R+H} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(\frac{R}{R+H}\right)$$

Die Länge des Kreisbogens B erhält man mittels folgender Formel:

$$B = \frac{R \cdot \pi \cdot \varphi}{180°}$$

Die Ergebnisse für verschiedene Werte von H sind in der untenstehenden Tabelle aufgelistet. Die Höhe H setzt sich dabei jeweils aus der Höhe des Gebäudes und der Annahme, dass sich die Augen des Beobachters bei einer Körperhöhe von 1,7 m befinden, zusammen.

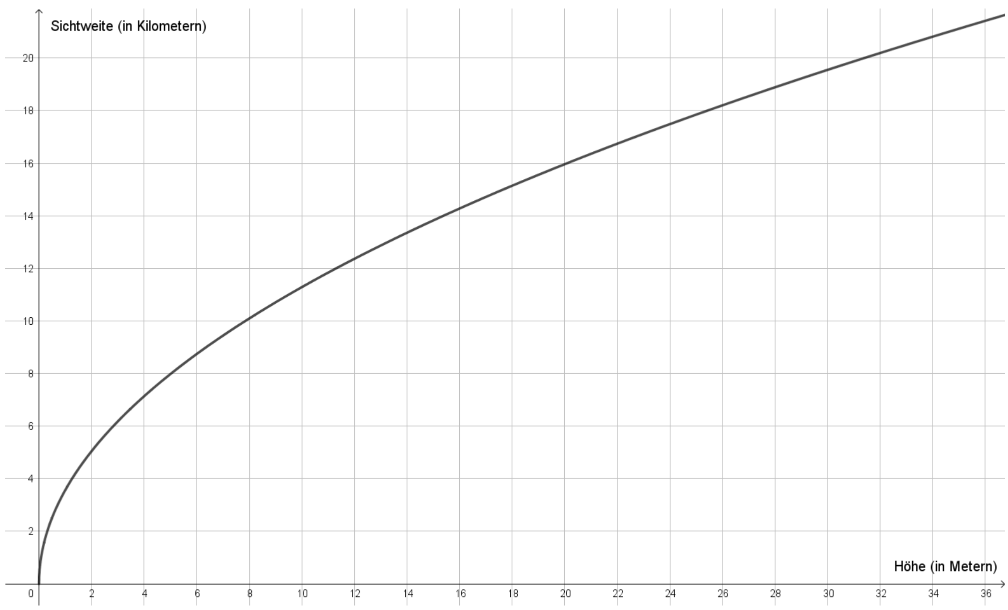
	Höhe H	Sichtwinkel φ	Sichtweite B
Boden	1,7 m	0,04186°	4,65 km
2. Stockwerk eines Wohnhauses	7,0 m	0,08493°	9,44 km
Donauturm (Aussichtsterrasse)	151,7 m	0,39539°	43,97 km

Man erkennt hier gut, dass der Zusammenhang zwischen Höhe und Sichtweite nicht linear ist. Von Beispiel 2 auf Beispiel 3 steigt die Höhe um den Faktor 21,7. Hingegen erhöht sich die Sichtweite nur um den Faktor 4,7.

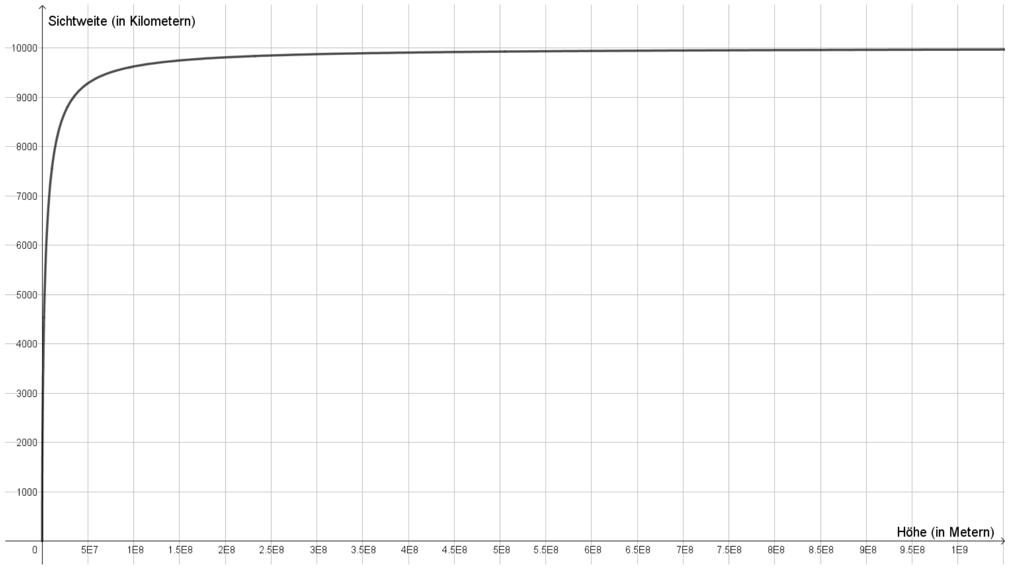
Der Zusammenhang zwischen Höhe und Sichtweite kann durch die folgende Funktionsgleichung beschrieben werden, wobei H in Meter eingesetzt wird und die Sichtweite B in Kilometer resultiert:

$$B(H) = \frac{6371 \cdot \pi \cdot \arccos\left(\frac{6371}{6371 + \frac{H}{1000}}\right)}{180°}$$

Der zugehörige Funktionsgraph sieht folgendermaßen aus:



Vergrößert man den Ausschnitt radikal, so nimmt der Funktionsgraph die folgende Gestalt an:



Die Schreibweise 2E8 in der obigen Abbildung bedeutet so viel wie $2 \cdot 10^8$ und ist eine bei Computerprogrammen häufig verwendete Darstellungsform von Gleitkommazahlen.

Es scheint so, als würde die Sichtweite auf einen Wert von ca. 10 000 km beschränkt sein. Die Berechnung des tatsächlichen Grenzwerts ergibt

$$\lim_{H \to \infty} B(H) = 10\,007{,}54\,\text{km}.$$

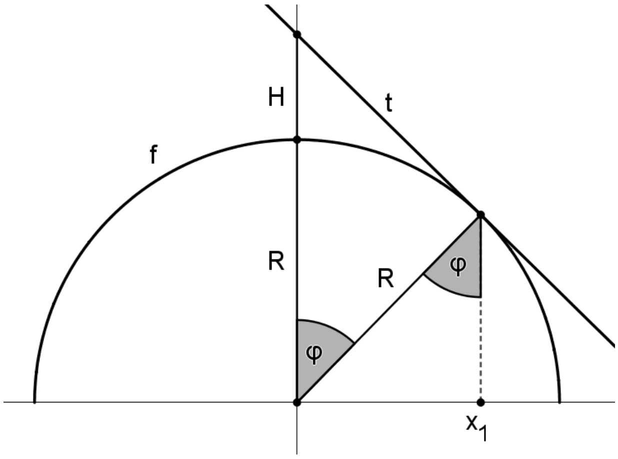
Warum ist das so? Selbst wenn man sich unendlich weit von der Erde entfernt, würde man stets nur die Oberfläche einer Halbkugel sehen. Es ist unmöglich, Teile der gegenüberliegenden Halbkugel zu erkennen. Somit ist die Sichtweite auf ein Viertel des Erdumfangs limitiert. Dieser Wert beträgt ungefähr

$$\frac{2 \cdot 6371 \cdot \pi}{4} \approx 10\,007{,}54\,\text{km}$$

und stimmt somit mit dem obigen Grenzwert überein.

Analytische Lösung

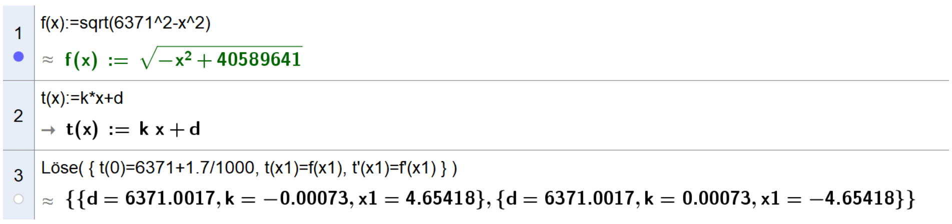
Der Halbkreis mit Radius R und Mittelpunkt im Koordinatenursprung kann durch die Funktionsgleichung $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ beschrieben werden. Die Tangente aus dem vorherigen Kapitel kann durch die Gleichung $t(x) = k \cdot x + d$ beschrieben werden. Der Berührungspunkt von f und t hat die x-Koordinate x_1. Dieser Sachverhalt entspricht folgender Abbildung:



Daraus ergeben sich nun drei Bedingungen für die Funktion t.

- $t(0) = R + H$ ... Die Gerade muss durch den Punkt $(0 \mid R + H)$ verlaufen.
- $t(x_1) = f(x_1)$ ... Im Berührungspunkt müssen t und f denselben Funktionswert haben.
- $t'(x_1) = f'(x_1)$ ... Im Berührungspunkt müssen beide Funktionen dieselbe Steigung haben.

Löst man dieses Gleichungssystem (beispielsweise mittels GeoGebra) für die Werte $R = 6731\,\mathrm{km}$ und $H = 0{,}0017\,\mathrm{km}$, so erhält man Folgendes:



1 f(x):=sqrt(6371^2-x^2)
$\approx$ $\mathbf{f(x) := \sqrt{-x^2 + 40589641}}$

2 t(x):=k*x+d
$\to$ $\mathbf{t(x) := k\,x + d}$

3 Löse({ t(0)=6371+1.7/1000, t(x1)=f(x1), t'(x1)=f'(x1) })
$\approx$ $\mathbf{\{\{d = 6371.0017, k = -0.00073, x1 = 4.65418\}, \{d = 6371.0017, k = 0.00073, x1 = -4.65418\}\}}$

Somit befindet sich der Berührungspunkt ungefähr beim x-Wert $4{,}65\,\mathrm{km}$. Dieser Wert ist zwar bereits identisch mit dem Ergebnis des ersten Beispiels des vorherigen Kapitels, jedoch handelt es sich noch nicht um die gesuchte Bogenlänge des Kreises. Um diese zu ermitteln, können zwei Wege verfolgt werden (ein geometrischer und ein algebraischer).

Zunächst wird der geometrische Weg beschrieben, welcher jedoch nicht empfehlenswert ist, da man sich hierbei wieder auf die Eigenschaften des Kreises bezieht und somit eine Verallgemeinerung des Sachverhalts nicht möglich ist. Um den Winkel φ zu ermitteln, wird erneut die obige Abbildung herangezogen, welche ein rechtwinkliges Dreieck aufweist.

Es gilt:

$$\tan(\varphi) = \frac{x_1}{f(x_1)} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{x_1}{f(x_1)}\right)$$

Für das konkrete Beispiel erhält man $\varphi \approx 0{,}04186°$, was identisch mit dem vorherigen Kapitel ist. Über die Formel des Kreisbogens erhält man daraus $B \approx 4{,}65\,\mathrm{km}$.

Besser ist es jedoch, den analytischen Lösungsweg beizubehalten und die gesuchte Bogenlänge mit Hilfe der Integralrechnung zu ermitteln. Allgemein kann die Länge des Funktionsgraphen der Funktion f im Intervall $[a, b]$ durch folgende Formel bestimmt werden:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Wendet man diesen Zusammenhang für die vorliegende Halbkreisfunktion f im Intervall $[0, 4.65]$ an, so erhält man folgendes Resultat:

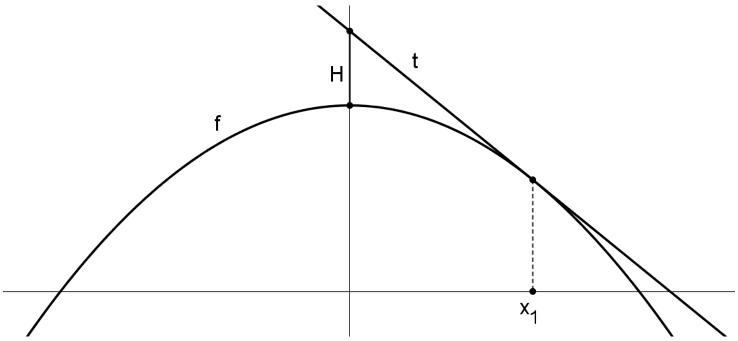
```
Integral(sqrt(1+(f'(x))^2), 0, 4.65)
≈ 4.65
```

Somit ergibt sich auch auf diese Weise die Sichtweite 4,65 km.

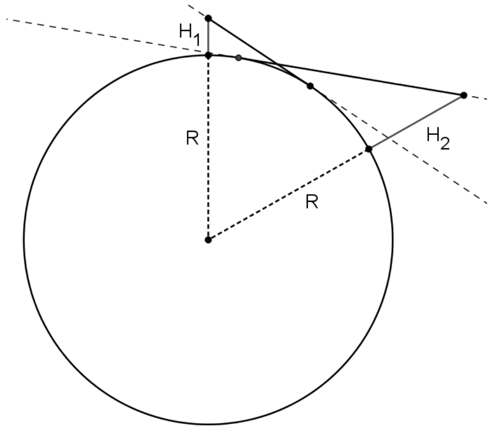
Weiterführende Fragestellungen

Folgende weiterführende Fragestellungen sind naheliegend:

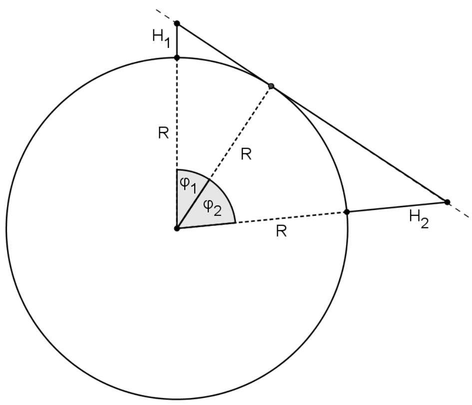
- Durch den soeben beschriebenen analytischen Lösungsweg ist man nicht mehr auf die Eigenschaften des Kreises angewiesen und kann diese Fragestellung auch auf andere Kurven übertragen. Denkbar wäre beispielsweise jene Situation, dass eine Person auf dem Scheitelpunkt eines Paraboloids steht und ermittelt werden soll, wie weit die Person auf dieser Oberfläche sieht. Dazu würde für die Funktion f eine quadratische Funktion, wie beispielsweise $f(x) = 5 - 0.5x^2$, gewählt werden. Der Rechenweg wäre ansonsten identisch zum oben beschriebenen analytischen Rechenweg.



- Eine weitere denkbare Fragestellung ist es, herauszufinden, aus welcher Entfernung man ein Objekt mit der Höhe H_2 sieht, wenn das Auge des Beobachters sich in der Höhe H_1 über dem Erdboden befindet.



In der obigen Abbildung erkennt man, dass die Person zu nahe am Objekt steht, da sich die Sichtfelder überlappen. Um die maximale Entfernung herauszufinden, muss der Abstand zwischen Person und Objekt daher größer werden.



Der größtmögliche Abstand ist jener, bei welchem die Berührungspunkte beider Tangenten zusammenfallen (siehe obige Abbildung). In diesem Fall werden, wie bereits beim anfangs erläuterten geometrischen Lösungsweg, beide Winkel gesondert berechnet und anschließend addiert.

Beispiel: Es soll berechnet werden, aus welcher Entfernung eine Person mit einer Aughöhe von 1,7 m ein 32 m hohes Gebäude sieht. Der Winkel φ_1 ist bereits aus den vorherigen Berechnungen bekannt und beträgt 0,04186°. Für den Winkel φ_2 ergibt sich durch die Formel aus dem geometrischen Lösungsweg der Wert 0,18160°. Somit ist die maximale Entfernung

$$\frac{6371 \cdot \pi \cdot (0{,}04186° + 0{,}18160°)}{180°} \approx 24{,}85\,\mathrm{km}.$$

Quellen

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Erdradius` (14. Februar 2020)