Konstruierbarkeit von Polygonen

Quelle: `https://mathe.zone/ausarbeitungen`
Version vom 28. April 2020

In dieser Ausarbeitung wird die Frage behandelt, welche regelmäßigen Polygone ausschließlich mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Dabei versteht man unter einem Lineal lediglich ein Werkzeug zum Zeichnen von Geraden. Es gibt jedoch keine Skala zum Messen von Längen und auch keine Möglichkeit, Winkel zu messen und zu zeichnen.

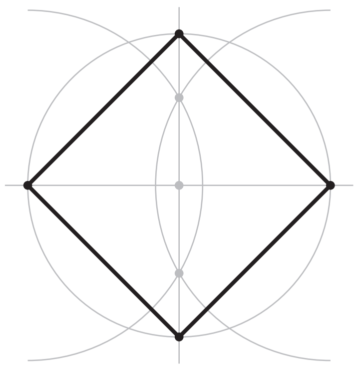
Einfache Konstruktionen

Zunächst wird erläutert, wie man auf relativ einfache Weise ein Quadrat, ein regelmäßiges Sechseck, ein gleichseitiges Dreieck und ein regelmäßiges Fünfeck mittels Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Bei allen Konstruktionen wird zunächst der gewünschte Umkreisradius des Polygons in den Zirkel genommen. Anschließend wird ein Mittelpunkt festgelegt und um diesen ein Kreis konstruiert.

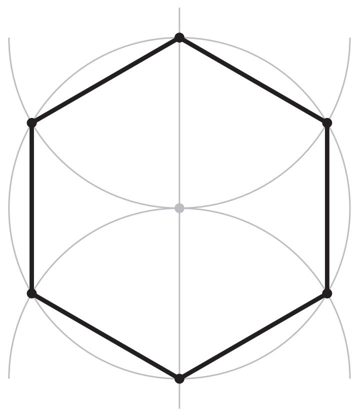
Quadrat

- Es wird eine Gerade durch den Mittelpunkt konstruiert. Die Schnittpunkte dieser Gerade mit dem Umkreis ergeben zwei Eckpunkte des Quadrats.
- Es wird ein etwas größerer Radius als der Umkreisradius in den Zirkel genommen und von beiden Eckpunkten ein Kreisbogen abgeschlagen.
- Durch die beiden Schnittpunkte der Kreisbögen wird eine Gerade gelegt. Die Schnittpunkte dieser Gerade mit dem Umkreis liefern die fehlenden beiden Eckpunkte des Quadrats.



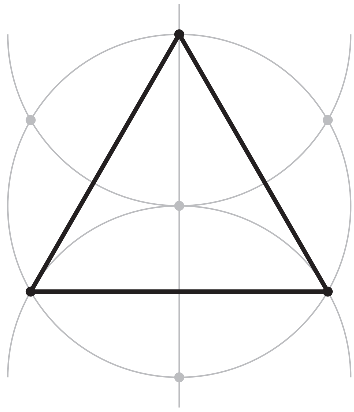
Regelmäßiges Sechseck (Hexagon)

- Es wird eine Gerade durch den Mittelpunkt konstruiert. Die Schnittpunkte dieser Gerade mit dem Umkreis ergeben zwei Eckpunkte des Sechsecks.
- Nun wird der Umkreisradius von beiden Eckpunkten abgeschlagen, wodurch jeweils zwei weitere Eckpunkte entstehen.

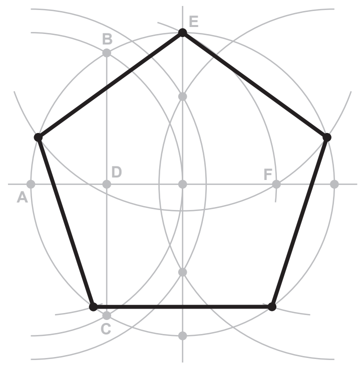


Gleichseitiges Dreieck

- Die Konstruktion des gleichseitigen Dreiecks ist identisch mit jener des regelmäßigen Sechsecks. Man verbindet jedoch nur jeden zweiten Eckpunkt.



Regelmäßiges Fünfeck (Pentagon)



- Zunächst wird eine Gerade durch den Mittelpunkt konstruiert. Anschließend wird durch Abschlagen zweier Kreisbögen, deren Radius etwas größer ist als der Umkreisradius, eine darauf senkrechte Gerade erzeugt (siehe Quadrat).
- Im nächsten Schritt wird eine der vier Strecken zwischen Mittelpunkt und Umkreis halbiert (hier wurde die linke Strecke ausgewählt). Dazu wird der Umkreisradius in den Zirkel genommen und von Punkt A des Umkreises abgeschlagen. Die dadurch entstehenden Schnittpunkte B und C mit dem Umkreis werden verbunden, wodurch die gewünschte Strecke im Punkt D halbiert wird.
- Nun wird die Strecke von D nach E in den Zirkel genommen und abgeschlagen, sodass der Punkt F entsteht. Die Strecke von E nach F entspricht der Seitenlänge des Fünfecks.
- Diese Strecke wird nun ausgehend von Punkt E (oder einem beliebigen anderen Punkt des Umkreises) fünfmal abgeschlagen.

Verdoppelung der Ecken

Indem man die Streckensymmetrale (auch Mittelsenkrechte) zwischen zwei benachbarten Eckpunkten bildet, und deren Schnittpunkt mit dem Umkreis des Polygons als weiteren Eckpunkt hinzufügt, kann man die Eckenanzahl verdoppeln. Auf diese Weise sind aus dem Dreieck, dem Quadrat und dem Fünfeck folgende weitere Eckenzahlen konstruierbar:

- 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, ...
- 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...
- 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, ...

Die Frage ist nun, ob dies die einzigen Polygone sind, welche mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Durch die Arbeiten von Carl Friedrich Gauß und Pierre-Laurent Wantzel wurde diese Frage restlos geklärt. Die Anzahl an tatsächlich konstruierbaren Polygonen wurde dadurch deutlich erhöht.

Kriterium für die Konstruierbarkeit

Die Frage nach der Konstruierbarkeit von regelmäßigen Polygonen führt zu den Fermatschen Primzahlen. Hierbei handelt es sich um Primzahlen der folgenden Form:

$$2^{2^n} + 1$$

Dabei ist $n \geq 0$ eine natürliche Zahl. Bis heute sind lediglich fünf Fermatsche Primzahlen bekannt, nämlich 3, 5, 17, 257 und 65537. Es wird vermutet, dass es keine weiteren gibt.

Das Kriterium für die Konstruierbarkeit von Polygonen lautet folgendermaßen: Das regelmäßige n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn n von der Form $n = 2^k \cdot p_1 \cdots p_m$ ist. Dabei ist $k \geq 0$ eine natürliche Zahl und $p_1, ..., p_5$ sind die fünf Fermatschen Primzahlen (von denen jede höchstens einmal vorkommen darf).

Auf diese Weise ergeben sich bis 1000 folgende konstruierbare Eckenzahlen:

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, **15**, 16, **17**, 20, 24, **30**, 32, **34**, 40, 48, **51**, **60**, 64, **68**, 80, **85**, 96, **102**, **120**, 128, **136**, 160, **170**, 192, **204**, **240**, **255**, 256, **257**, **272**, 320, **340**, 384, **408**, **480**, **510**, 512, **514**, **544**, 640, **680**, 768, **771**, **816**, **960**

Die fett geschriebenen Zahlen sind in den Listen des vorigen Kapitels nicht enthalten.