

Königsberger Brückenproblem

Quelle: <https://mathe.zone/ausarbeitungen>

Version vom 28. April 2020

Einleitung

Die heutige russische Exklave Kaliningrad hieß früher Königsberg und gehörte zu Preußen. Durch diese Stadt fließt der Pregel. Die Besonderheiten sind einerseits, dass es auf dem Pregel eine bewohnte Insel gibt und andererseits, dass er sich beim Verlassen der Stadt aufteilt. Vor dem zweiten Weltkrieg gab es in Königsberg insgesamt sieben Brücken, welche die vier durch den Pregel getrennten Stadtteile miteinander verbunden haben. Diese sind in der folgenden Abbildung grün eingezeichnet.

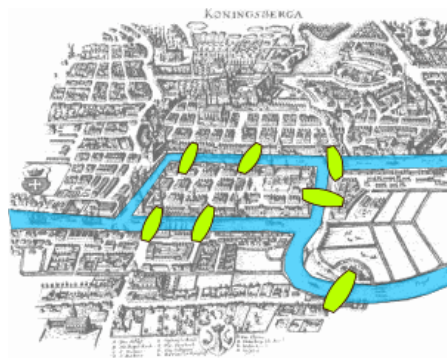


Abbildung 1: Stadtplan von Königsberg

Problemstellung

Man stellte sich die Frage, ob es einen Weg gibt, bei dem man alle sieben Brücken einmal überquert, ohne dabei eine Brücke doppelt zu benutzen. Dieses Problem wurde 1736 vom Schweizer Mathematiker Leonhard Euler untersucht und gelöst. Heute ordnet man diese Fragestellung der sogenannten Graphentheorie zu. Nachfolgend wird die Lösung des Problems anhand einiger Erkenntnisse der Graphentheorie beschrieben.

Lösung

Im ersten Schritt wird die Situation durch einen sogenannten Graphen abstrahiert. Die grauen Kreise werden als Knoten des Graphen bezeichnet und die Verbindungslinien als Kanten. Unter einem Weg versteht man eine Abfolge von zusammenhängenden Knoten und Kanten.

In der nebenstehenden Abbildung repräsentiert der Knoten A den nördlichen Stadtteil, B den südlichen Stadtteil, C die Insel und D den von den beiden Flussseiten eingeschlossenen östlichen Stadtteil. In der Sprache der Graphentheorie lautet die oben beschriebene Fragestellung nun folgendermaßen: Gibt es einen Weg der alle sieben Kanten genau einmal enthält?

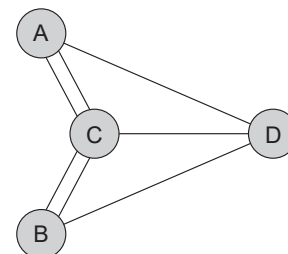


Abbildung 2: Graph

Einen solchen Weg bezeichnet man übrigens als eulerschen Weg. Um zu klären, ob dieser Graph einen solchen eulerschen Weg besitzt, benötigt man einen weiteren Begriff der Graphentheorie, den Grad eines Knotens. Unter dem Grad eines Knotens versteht man die Anzahl an Kanten, welche von diesem Knoten ausgehen. Man verwendet nun den sogenannten Satz von Euler, welcher die folgende Aussage hat: Ein Graph besitzt genau dann einen eulerschen Weg, wenn es nicht mehr als zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt.

Jetzt müssen nur noch die Grade der einzelnen Knoten bestimmt werden. Knoten C besitzt Grad 5, da hier fünf Brücken angrenzen. Alle anderen Knoten besitzen jeweils Grad 3. Es sind somit die Grade aller vier Knoten ungerade, weshalb es mehr als zwei Knoten mit ungeradem Grad gibt. Daher kann es keinen eulerschen Weg durch Königsberg geben.

Abbildungsverzeichnis

[1] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Koenigsberg_bridges.png (Zugriff: 5. April 2019)

[2] selbst erstellt