Geburtstagsparadoxon

Quelle: `https://mathe.zone/ausarbeitungen`
Version vom 17. August 2021

Fragestellung

In einem Raum befindet sich eine bestimmte Anzahl an Personen. Die Frage ist nun, wie wahrscheinlich es ist, dass mindestens zwei Personen den selben Geburtstag haben. Das Geburtsjahr spielt keine Rolle. Außerdem wird als Vereinfachung davon ausgegangen, dass jedes Jahr 365 Tage hat und die Geburtswahrscheinlichkeit für alle Tage gleich hoch ist. Zusätzlich müssen die einzelnen Geburtstage unabhängig sein. Dies wäre beispielsweise nicht der Fall, wenn Zwillinge unter den anwesenden Personen sind.

Herleitung

Die Anzahl an Personen wird mit n bezeichnet und es gilt $2 \leq n \leq 365$.

Insgesamt gibt es 365^n Möglichkeiten, um die Geburtstage von n Personen auf 365 Tage zu verteilen. In der Kombinatorik würde man von Variationen mit Wiederholung sprechen, da die Reihenfolge der Geburtstage eine Rolle spielt und jeder Tag mehrmals vorkommen darf.

Im nächsten Schritt wird ermittelt, wie viele Möglichkeiten es gibt, dass alle n Personen einen unterschiedlichen Geburtstag haben. Für die erste Person stehen 365 Tage zur Verfügung. Für die zweite Person sind es nur noch $365 - 1 = 364$ Tage, und bei der n-ten Person sind es $365 - (n-1)$ Tage. Somit erhält man insgesamt folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$365 \cdot 364 \cdot (365 - (n-1))$$

Unter Verwendung der Fakultät kann dieser Term auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{365!}{(365-n)!}$$

Da alle 365 Tage dieselbe Geburtswahrscheinlichkeit haben sind auch alle 365^n Kombinationsmöglichkeiten gleich wahrscheinlich. Daher kann die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen an unterschiedlichen Tagen geboren sind, folgendermaßen anhand der Laplace-Formel berechnet werden:

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot (365 - (n-1))}{365^n} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

Die ursprünglich gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei von n Personen am selben Tag geboren sind, entspricht nun der Gegenwahrscheinlichkeit des obigen Resultates. Diese kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$P(n) = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}$$

Da viele Taschenrechner nur Fakultäten bis inklusive 69 berechnen können, ist die obige Formel wegen 365! nicht anwendbar. Man kann sie jedoch mit Hilfe der Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{x}{y} = \frac{x!}{y! \cdot (x-y)!}$ umformen zu folgender Form:

$$P(n) = 1 - \binom{365}{n} \cdot \frac{n!}{365^n}$$

Auf diese Weise können zumindest für bis zu 69 Personen die Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Für größere Anzahlen muss auf ein geeignetes Computerprogramm ausgewichen werden.

Auswertung

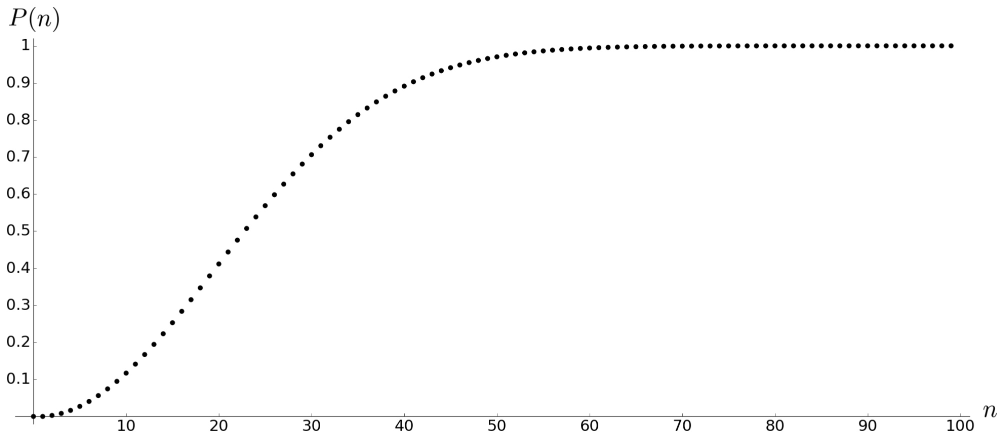
Die folgende Tabelle listet einige Wahrscheinlichkeitswerte auf:

n	$P(n)$
2	0,002740
3	0,008204
4	0,016356
5	0,027135
6	0,040463

n	$P(n)$
7	0,056236
8	0,074335
10	0,116948
20	0,411438
23	0,507297

n	$P(n)$
30	0,706316
40	0,891232
50	0,970374
60	0,994123
70	0,999160

Man erkennt, dass bereits ab einer geringen Anzahl von nur 23 Personen die Wahrscheinlichkeit erstmals größer als 50 % ist. Nachfolgender Graph zeigt alle Wahrscheinlichkeiten bis inklusive $n = 100$.



Da die Fakultät von negativen Zahlen nicht definiert ist, kann die oben hergeleitete Formel nur für $n \leq 365$ verwendet werden. Für $n > 365$ ist die Situation jedoch anhand des sogenannten Schubfachprinzips sehr einfach: Da es nur 365 Tage gibt, müssen ab einer Anzahl von 366 Personen mindestens zwei Personen denselben Geburtstag haben. Daher gilt für $n > 365$ immer $P(n) = 1$.