Das fehlende Quadrat

Quelle: `https://mathe.zone/ausarbeitungen`
Version vom 28. April 2020

Problemstellung

In der folgenden Abbildung entsteht durch Umordnen der vier bunten Figuren der Eindruck, als würde sich der Flächeninhalt der gesamten Figur verändern. Die Hintergründe dieser optischen Täuschung werden nachfolgend analysiert.

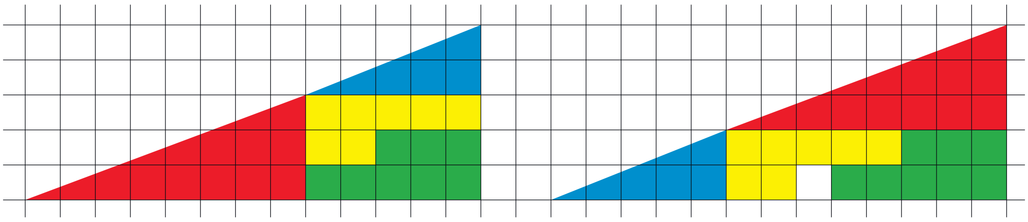

Abbildung 1: Optische Täuschung

Auflösung

Die gelbe und die grüne Fläche haben in der linken und in der rechten Anordnung denselben Flächeninhalt. Zur Überprüfung müssen lediglich die Kästchen gezählt werden. Auch die beiden rechtwinkligen Dreiecke haben in beiden Anordnungen denselben Flächeninhalt, da ihre Katheten jeweils gleich lang sind.

Der entscheidende Punkt ist jedoch die Steigung der beiden Dreiecke. Das rote Dreieck hat eine Steigung von $\frac{3}{8}$ bzw. einen Steigungswinkel von $\arctan\left(\frac{3}{8}\right) \approx 20{,}556°$. Das blaue Dreieck hingegen hat eine Steigung von $\frac{2}{5}$ bzw. einen Steigungswinkel von $\arctan\left(\frac{2}{5}\right) \approx 21{,}801°$.

Da die Steigungen somit geringfügig verschieden sind, handelt es sich bei der Gesamtfigur um kein Dreieck sondern um ein Viereck (denn die „Hypotenuse“ hat einen Knick). Um zu erklären, woher die Lücke stammt, werden in der folgenden Abbildung die Umrisse der beiden Anordnungen übereinandergelegt:

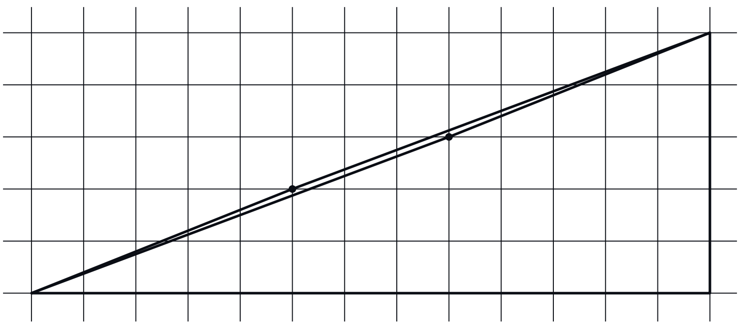

Abbildung 2: Vergleich

Die Knickstellen wurden als Punkt eingezeichnet. Man erkennt, dass die beiden Figuren nicht deckungsgleich sind. Die in Abbildung 1 links dargestellte Figur, welches den Knick weiter oben hat, besitzt einen kleineren Flächeninhalt. Somit ist es nachvollziehbar, dass in der rechten Figur, irgendwo ein Stück fehlen muss. Es bleibt noch zu klären, ob diese schmale Teilfläche genau dem 1×1-Quadrat entspricht, welches rechts in Abbildung 1 fehlt.

Um die schmale Teilfläche zu berechnen, werden jeweils die Flächeninhalte der beiden Vierecke berechnet und deren Differenz ermittelt:

- Im linken Viereck, welches man in zwei Dreiecke und ein Rechteck zerlegen kann, erhält man den Flächeninhalt $\frac{8 \cdot 3}{2} + \frac{5 \cdot 2}{2} + 5 \cdot 3 = 12 + 5 + 15 = 32$.
- Im rechten Viereck, welches man ebenfalls in zwei Dreiecke und ein Rechteck zerlegen kann, erhält man den Flächeninhalt $\frac{5 \cdot 2}{2} + \frac{8 \cdot 3}{2} + 8 \cdot 2 = 5 + 12 + 16 = 33$.

Somit ist die Differenz genau 1, womit das fehlende Quadrat gefunden wäre.

Abbildungsverzeichnis

Alle Abbildungen wurden selbst erstellt.