

1] Berechne unter Verwendung der folgenden drei Matrizen die gesuchten Ergebnisse.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------------|----------------|
| a) $A + B + C$ | e) $A + 2 \cdot (B - C)$ | i) C^2 |
| b) $A - B - C$ | f) $A^\top + A$ | j) $A^2 + B^2$ |
| c) $-4 \cdot C$ | g) $2 \cdot B^\top + 3 \cdot C^\top$ | k) $(A + B)^2$ |
| d) $2 \cdot A + 3 \cdot B$ | h) $B - (A + C)^\top$ | l) C^3 |

2] Berechne unter Verwendung der folgenden drei Matrizen die gesuchten Ergebnisse, sofern dies hinsichtlich der Formate der Matrizen möglich ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- | | | |
|----------------|------------------------|---------------------|
| a) $A \cdot B$ | d) $B \cdot C \cdot A$ | g) $A \cdot C$ |
| b) $B \cdot A$ | e) $C \cdot B \cdot A$ | h) $C \cdot A$ |
| c) $B \cdot C$ | f) $B \cdot C^\top$ | i) $C^\top \cdot A$ |

3] Überprüfe, welche der folgenden Aussagen allgemein gültig sind.

- | | |
|--|---|
| a) $A + B = B + A$ | k) $(A \cdot B)^\top = A^\top \cdot B^\top$ |
| b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ | l) $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$ |
| c) $k \cdot (A + B) = k \cdot B + k \cdot A$ | m) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ |
| d) $A \cdot B = B \cdot A$ | n) $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ |
| e) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ | o) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ |
| f) $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ | p) $(A^{-1})^{-1} = A$ |
| g) $(A^\top)^\top = A$ | q) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$ |
| h) $(k \cdot A)^\top = k \cdot A^\top$ | r) $(k \cdot A)^{-1} = k \cdot A^{-1}$ |
| i) $A^\top \cdot A = A \cdot A^\top$ | s) $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$ |
| j) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$ | |

4] Berechne für die folgenden Matrizen jeweils die inverse Matrix (2×2 handschriftlich, 3×3 mit dem Computer).

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ | d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ | g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ | e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ | h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ | f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ | i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ |

5 Löse die folgenden Matrixgleichungen ohne Computer.

a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ -3 & -10 \end{pmatrix}$

b) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - X^T = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 26 \\ 23 & 38 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 56 \\ 88 & 64 \end{pmatrix}$

e) $2 \cdot X + \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot X$

f) $\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 7 & -14 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$

6 In den nachfolgenden Rechnungen sind nur die Formate der Matrizen vorgegeben. Überprüfe, ob diese Berechnungen durchführbar sind. Falls ja, gib an, welches Format das Ergebnis hat. Falls nein, gib an, warum die Berechnung nicht möglich ist.

a)

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

7 a) Es sind die 2×3 -Matrix A , die 3×2 -Matrix B und die 3×3 -Matrix C gegeben. Kreuze alle Terme an, für die ein Ergebnis existiert. b) Es sind die 2×3 -Matrix A , die 3×3 -Matrix B und die 5×2 -Matrix C gegeben. Kreuze alle Terme an, für die ein Ergebnis existiert.

$A \cdot B + C$

$A \cdot B \cdot C$

$B \cdot C \cdot A$

$A \cdot C \cdot B$

$C + B \cdot A$

$A + B^T$

$A \cdot B \cdot C$

$C \cdot A \cdot B$

$A \cdot C^T$

$B \cdot A^T$

B^2

C^2

8 Ergänze die Lücken der folgenden Multiplikationen.

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \square \\ 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & \square \\ 6 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & \square & 13 \\ 4 & -9 & 6 \\ -26 & \square & 12 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -2 \\ \square & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ \square & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & 5 & 10 \\ -12 & 0 & 10 \\ 21 & -1 & \square \end{pmatrix}$$

9 Die Matrizen A, B, C haben folgendes Format:

- A ist eine 2×3 -Matrix.
- B ist eine 4×2 -Matrix.
- C ist eine 2×2 -Matrix.

Welche ist die einzige Möglichkeit, um diese drei Matrizen zu multiplizieren?

$$\square \cdot \square \cdot \square$$

Welches Format hat das Ergebnis der obigen Multiplikation?

Zeilen

Spalten

10 Bei reellen Zahlen kann $a \cdot b = 0$ nur dann gelten, wenn zumindest eine der beiden Zahlen 0 ist. Für Matrizen kann allerdings auch $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gelten, obwohl beide Matrizen ungleich der Nullmatrix sind. Finde zwei passende Matrizen, für welche diese Eigenschaft erfüllt ist.

1 ...

2 ...

3 ...

4 ...

5 a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

6 a) 3×1 -Matrix

b) nicht möglich, denn die Spaltenanzahl der zweiten Matrix stimmt nicht mit der Zeilenanzahl der dritten Matrix überein

7 a) nein, nein, nein, ja, ja, ja

b) nein, ja, nein, ja, ja, nein

8 a) -5, 1, 13, 29

b) -1, 6, -3, -19

9 $B \cdot C \cdot A$, 4 Zeilen, 3 Spalten

10 z. B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$