Arbeitsblatt: Differentialgleichungen

Version vom 6. September 2024

$\boxed{1}$ Gib jeweils den Grad und die Ordnung der folgenden Differentialgleichungen an! Entscheide außerdem, welche der folgende Eigenschafte zutreffen: (1) linear/nichtlinear, (2) homogen/inhomogen/keine Aussage möglich, (3) konstante Koeffizienten/keine konstanten Koeffizienten/keine Aussage möglich, (4) gewöhnlich/partiell

a) $3y''+2x\cdot y'-\sin(5x)=0$ b) $(y')^2+5y=0$ c) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\cdot\frac{dy}{dx}+7y=0$

$\boxed{2}$ Ordne den Differentialgleichungen auf der linken Seite jeweils die passende Lösung der rechten Seite zu!

$y''=4y$		A	$y=c\cdot\sqrt[4]{x}$
$y'=4x$		B	$y=2x^2+c$
$y'=y-4$		C	$y=c\cdot e^{4x}$
$y'=4y$		D	$y=c_1\cdot e^{2x}+c_2\cdot e^{-2x}$
$4xy'=y$		E	$y=c\cdot e^{x}+4$

$\boxed{3}$ Bestimme jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

a) $6x\cdot y'-3y=0$
b) $\dot{x}+7x\cdot\cos(t)=0$
c) $y'+xy=2x$
d) $y'=-3y+4$
e) $y'=5xy$
f) $xy'-y=x^2\cdot\cos(x)$
g) $xy'+2y-xy^2=0$
h) $y=e^y\cdot\sin(x)$
i) $y'-2xy=x^3$
j) $y'+y\cdot\cos(x)=0$

$\boxed{4}$ Bestimme jeweils die allgemeine Lösung mit der Methode „Trennen der Variablen“.

a) $y'=2x\cdot y$
b) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+2v=0$
c) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4-10v$

$\boxed{5}$ Bestimme jeweils die spezielle Lösung der folgenden Differentialgleichungen.

a) $y''=\sqrt{x},\quad y(0)=4,\ y'(0)=16$
b) $x\cdot y'=-2y,\quad y(1)=4$
c) $y''=-2x+1,\quad y(3)=1,\ y'(0)=-2$

$\boxed{6}$ Gegeben ist die nichtlineare Differentialgleichung $y'+a\cdot y^2=0$. Dabei ist $y(x)$ die Funktion und a eine beliebige reelle Zahl.

a) Weise nach, dass $y=\frac{1}{a\cdot x+c}$ die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist.

b) Bestimme die spezielle Lösung der Differentialgleichung $y'+3\cdot y^2=0$ mit der Nebenbedingung $y(1)=2$.

$\boxed{7}$ In einem Teich werden Fische ausgesetzt. Es wird geschätzt, dass maximal 1000 Fische in diesem Teich leben können. Das Populationswachstum ist proportional zum bereits vorhandenen Fischbestand und zur Anzahl an noch verfügbaren Plätzen. Der aktuelle Fischbestand wird durch die Funktion $N(t)$ beschrieben. Erstelle eine Differentialgleichung, welche diesen Zusammenhang beschreibt.

$\boxed{8}$ Erstelle eine beliebige gewöhnliche inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, welche nicht ausschließlich konstante Koeffizienten hat. Dabei soll x eine von t abhängige Funktion sein.

9 Für den radioaktiven Zerfall gilt die Differentialgleichung $-\lambda \cdot N = \frac{dN}{dt}$, wobei $\lambda > 0$ eine Konstante ist und $N(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallenen Atome angibt.

a) Erkläre anhand mathematischer Argumente, wie man an dieser Differentialgleichung erkennen kann, dass die Anzahl an noch nicht zerfallenen Atomen mit zunehmender Zeit weniger wird.

b) Berechne die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

10 Ein glühendes Metallstück hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von $700\,°\mathrm{C}$ und befindet sich in einem Raum mit der Umgebungstemperatur $T_U = 22\,°\mathrm{C}$. Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Metallstücks ist direkt proportional zur Differenz zwischen der Umgebungstemperatur T_U und der aktuellen Temperatur T.

a) Erstelle eine Differentialgleichung, welche die Temperatur T des Metallstücks während des Abkühlungsprozesses beschreibt. Bezeichne den Proportionalitätsfaktor mit k.

b) Ergänze die Lücke!

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \boxed{}$$

c) Kreuze an, welche der folgenden Aussagen auf den oben beschriebenen Abkühlungsprozess zutrifft.

- ◯ $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} > 0$
- ◯ $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0$
- ◯ $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} < 0$

11 In einem Weingarten mit insgesamt 400 Weinreben breitet sich ein Schädling aus. Die Anzahl der wöchentlich neu befallenen Weinreben beträgt $7\,\%$ der noch nicht befallenen Pflanzen. Die Anzahl der nach t Wochen befallenen Weinreiben wird durch die Funktion $N(t)$ beschrieben.

a) Erstelle eine Differentialgleichung, welche die Ausbreitung des Schädlings beschreibt.

b) Berechne die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

c) Nach wie vielen Wochen sind $90\,\%$ aller Weinreben befallen, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ bereits 20 Pflanzen befallen waren?

12 In Gewässern nimmt die Intensität des einfallenden Sonnenlichts mit zunehmender Tiefe ab. Die lokale Änderungsrate der Lichtintensität ist dabei proportional zur Lichtintensität selbst, wobei die Proportionalitätskonstante mit k und die Lichtintensität unmittelbar unterhalb der Wasseroberfläche mit I_0 bezeichnet wird. Bestimme die Funktionsgleichung $I(x)$, welche die Intensität in Abhängigkeit von der Tiefe x beschreibt.

13 Ein Konferenzraum hat ein Volumen von $500\,\mathrm{m}^3$. Als die Lüftungsanlage zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird, beträgt der CO_2-Gehalt der Raumluft 1200 ppm. Von nun an werden pro Sekunde $2\,\mathrm{m}^3$ Raumluft abgesaugt und durch frische Außenluft (400 ppm CO_2-Gehalt) ersetzt. Das gesamte CO_2-Volumen, welches sich zum Zeitpunkt t im Raum befindet, soll mit $V(t)$ bezeichnet werden. Dabei wird t in Sekunden und V in m^3 gemessen.

a) Erstelle eine Differentialgleichung, welche die Änderung des CO_2-Volumens beschreibt.

b) Ermittle die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

c) Ermittle die spezielle Lösung dieser Differentialgleichung.

d) Berechne, nach wie vielen Sekunden der CO_2-Gehalt auf 700 ppm gesunken ist.

$\boxed{1}$

$\boxed{2}$ D, E, C, B, A

$\boxed{3}$ a) $y = c \cdot \sqrt[6]{x^3}$ b) $x = c \cdot e^{-7 \cdot \sin(t)}$

....

$\boxed{4}$ ...

$\boxed{5}$ a) ....

$\boxed{6}$ ...

$\boxed{7}$ $\dot{N} = k \cdot N \cdot (1000 - N)$

$\boxed{8}$ z. B. $x'' + t \cdot x' - 2x = \sin(t)$

$\boxed{9}$ a) Die linke Seite ist insgesamt negativ, da $\lambda > 0$ ist und N ebenfalls größer als 0 ist. Somit ist die Änderung $\dot{N}$ auf der rechten Zeit ebenfalls negativ. Eine negative Änderung entspricht einer Abnahme des Funktionswertes von N mit zunehmender Zeit t.

b) $N(t) = c \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$\boxed{10}$ ...

$\boxed{11}$ a) $\dot{N} = 0{,}07 \cdot (400 - N)$

b) ...

c) ...

$\boxed{12}$ $I(x) = I_0 \cdot e^{k \cdot x}$

$\boxed{13}$ a) $\dot{V} = 2 \cdot 400 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot \frac{V}{500}$

b)

c)

d)