1 Bringe den gegebenen Term durch die sogenannte „Quadratische Ergänzung“ in die Form $a \cdot (x+k)^2 + r$, wobei $a, k, r \in \mathbb{R}$ sind!

a) $3x^2 - 24x + 53$
b) $2x^2 - 12x + 13$
c) $-x^2 - 6x - 8$
d) $x^2 - 26x + 140$
e) $-15x^2 - 360x - 2170$
f) $\frac{1}{4}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x - \frac{11}{4}$

2 Erkläre jeweils, welcher Fehler beim Einsetzen in die Lösungsformel gemacht wurde:

a) $3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$

b) $2x^2 - 7x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{-7^2 + 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$

c) $5x^2 + 3x = 10 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10}}{2 \cdot 5}$

3 Gib jeweils an, wie viele verschiedene reelle Lösungen die folgenden quadratischen Gleichungen besitzen.

a) $x^2 = -5$
b) $1{,}2x^2 - 2{,}5 = 3{,}6$
c) $28 + 9x^2 = 3x$
d) $5x^2 - 22x + 13 = 0$

4 Finde alle reellen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen!

a) $5x^2 + 15x - 20 = 0$
b) $x^2 - 11x + 28 = 0$
c) $3x^2 + 12x + 15 = 0$
d) $1{,}2x^2 - 14{,}4x + 43{,}2 = 0$
e) $5x^2 - 20 = 0$
f) $x^2 - 16x + 48 = 0$
g) $3x^2 - 39x = 0$
h) $x^2 + 12x + 40 = 0$
i) $2x^2 + 2{,}4x - 1{,}7 = 0$
j) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{3}{4} = 0$

5 Finde alle reellen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen!

a) $5x^2 - 100 = 25$
b) $5x^2 = 3x$
c) $x^2 + 13 = 6x$
d) $(x-4)^2 = 2x^2 + 7$
e) $5z - (3+2z)^2 = 7$
f) $3 - (2+4z)^2 = 2z + 1$
g) $(3x+1)^2 = 9x + 7$
h) $(3z+2) \cdot (4-5z) = 2z - 7$
i) $(x-5)^2 - (1+x)^2 = 97 - (2x+3)^2$
j) $(x-4)^2 + 3 = (3x-13)^2$
k) $3 \cdot (2-x)^2 = (5x-1) \cdot (2-x)$
l) $(z+1)^2 - (3z-1) \cdot (z+3) = 8$
m) $(x-3) \cdot (5x+2) = (2x+3) \cdot (x-2)$
n) $(5-2x) \cdot (3x-4) = (2x-12) \cdot (2x-2)$
o) $(3x-5) \cdot (2x+3) - (4x+5) \cdot (x-6) = 35$
p) $3 \cdot (x-2) \cdot (x+5) - 18 = 2 \cdot (x+9) \cdot (x-1)$

© MATHE.ZONE
Lösungen:

6 Finde alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen und gib zuvor die Definitionsmenge an.

a) $\frac{x^2}{x+1} = 2$

b) $\frac{x^2+1}{x} = 3$

c) $\frac{x^2-4}{x+2} = x$

d) $\frac{x^2+5}{x-2} = \frac{x}{2}$

e) $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{x+3}{2}$

f) $\frac{2}{z-1} = \frac{z}{2+z}$

g) $\frac{3x}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{3-4x}{x^2-1}$

h) $\frac{5}{x} + \frac{x}{2} = 3x$

i) $\frac{x^2+1}{x-1} - \frac{2x}{x+1} = 1$

7 Finde alle reellen Lösungen der folgenden biquadratischen Gleichungen.

a) $3x^4 - 219x^2 + 1728 = 0$

b) $5x^4 + 50x^2 - 500 = 0$

c) $5x^4 - 30x^2 + 200 = 2x^4 + 12x^2 + 80$

d) $3x^2 \cdot (2x^2 - 1) = 3x^4$

e) $2 \cdot (3x^2 - 5)^2 = (3 - 4x^2)^2 - 23$

f) $(3x^2 + 2) \cdot (2 - 2x^2) = (x^2 - 8) \cdot (6x^2 - 3)$

8 Ergänze die Tabelle! Die Variablen p, q stehen für die Koeffizienten von normierten quadratischen Gleichungen $x^2 + px + q = 0$ und x_1, x_2 sind deren Lösungen.

p	q	x_1	x_2
50	589		
		-12	23
1,4		0,3	
	-209		-11

9 Erstelle eine normierte quadratische Gleichung, welche ausschließlich die folgenden Lösungen besitzt!

a) 3 und 5

b) -2 und 7

c) $\frac{1}{3}$ und $-\frac{3}{2}$

d) 2,5 und $-3{,}2$

e) 0 und $\frac{5}{3}$

f) 2 (doppelte Lösung)

10 Erstelle eine Formel zur Berechnung der gesuchten Größe und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

a) $s = \frac{a}{2} \cdot t^2, \quad t = ?$

b) $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2, \quad t = ?$

c) $O = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \quad r = ?$

d) $V = \frac{h \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2), \quad r = ?$

11 Gib eine beliebige quadratische Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ an, die keine reelle Lösung besitzt und beschreibe nachvollziehbar, wie man eine derartige Gleichung finden kann (ohne zufällige Zahlenkombinationen zu probieren).

12 Gib eine beliebige quadratische Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ an, die genau eine Lösung besitzt und beschreibe nachvollziehbar, wie man eine derartige Gleichung finden kann (ohne zufällige Zahlenkombinationen zu probieren).

13 Begründe ausführlich und mathematisch korrekt, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Wenn bei der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ entweder a oder c negativ ist (aber nicht beide), so besitzt die Gleichung mindestens eine reelle Lösung.

© MATHE.ZONE
Lösungen: