1 Berechne die ersten fünf Folgenglieder der folgenden implizit (durch eine Rekursion) oder explizit (durch einen Folgenterm) angegebenen Folgen.

a) $a_1 = 3, \quad a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1}$

b) $a_n = (n-1) \cdot (n+1)$

c) $a_n = n^2 - n$

d) $a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$

e) $a_n = (-n)^n$

f) $a_n = 2^n - 2n + 1$

g) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n$

h) $a_n = n! - n$

2 Erstelle jeweils einen erzeugenden Folgenterm.

a) $0, 3, 6, 9, 12, 15, ...$

b) $4, 9, 16, 25, 36, 49$

c) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, ...$

d) $1, -2, 3, -4, 5, -6, ...$

e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, ...$

f) $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...$

g) $3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, ...$

h) $1, 3, 5, 7, 9, 11, ...$

i) $1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, ...$

j) $10, 5, \frac{10}{3}, \frac{5}{2}, 2, \frac{5}{3}, \frac{10}{7}, ...$

k) $8, 16, 32, 64, 128, ...$

l) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, ...$

3 Nachfolgend sind einige Folgenterme angegeben. Bestimme jeweils, ob die zugehörigen Folgen (streng) monoton wachsend, (streng) monoton fallend, alternierend oder konstant sind. Gib außerdem an, ob sie beschränkt sind und falls ja, welches Infimum bzw. Supremum sie haben.

a) $\frac{2}{2n+1}$

b) $\frac{(-1)^n}{2n}$

c) $\frac{3n+3}{2n+1}$

d) $\frac{(-1)^{2n}}{n}$

e) $5^n + 3$

f) $\frac{n}{n^2+1}$

g) $(n+1) \cdot (n-1)$

h) $\frac{5}{n} + \frac{2}{n^2+1}$

4 Bestimme den Grenzwert der durch die folgenden Terme beschriebenen Folgen!

a) $\frac{2n^3-5n^2}{n^3+8n}$

b) $\frac{5n^3+5}{n^2-1}$

c) $\frac{6n^2+7n-15}{2n^2-5}$

d) $\frac{(4n-2)\cdot(5n+3)}{(n+1)\cdot(4n+7)}$

e) $\frac{(2n+3)^2}{(n+1)^3}$

f) $\sin(n) \cdot \frac{5}{n} + 3$

g) $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

h) $\left(1 + \frac{\ln(5)}{n}\right)^n$

i) $\frac{5^n-3^n}{5^n+2^n}$

j) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

k) $\frac{3}{n^2+1} \cdot \frac{4n^2+3n}{2n^2-7}$

l) $(-1)^n \cdot 0{,}65^n$

m) $(-2)^n \cdot 0{,}65^n$

n) $0{,}2^n \cdot 5^{n+2}$

o) $\frac{0{,}25^n \cdot 8^{n+1}}{5^n}$

p) $4{,}2 - (-5)^n \cdot 0{,}1^n$

q) $\frac{\cos(n)}{n+\sin(n)}$

r) $\frac{2\cdot7^n-5^n}{5^n-7^n}$

s) $(-1)^n \cdot \frac{3}{n^2} + 5$

t) $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 n$

5 Bestimme den Grenzwert der durch die folgenden Terme beschriebenen Folgen und berechne, ab welchem n die Eigenschaft $|a_n - a| < 0.001$ erfüllt ist!

a) $\frac{n-1}{n^2+1}$ b) $\frac{3n+7}{5n-4}$ c) $\frac{5n^2-3n+7}{n^2-1}$ d) $\frac{6n^2+3n-2}{2n^2-5}$

6 Bestimme jeweils alle Häufungspunkte sowie den Limes superior und den Limes inferior!

a) $3 \cdot (-1)^n$

b) $2 \cdot \cos(\frac{n\pi}{4}) + 3$

c) $3 \cdot \sin(\frac{n\pi}{5}) \cdot \frac{n}{n+5}$

d) $(-1)^n + \frac{1}{2} \cdot (-1)^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$

7 Finde jeweils eine Folge, welche die geforderte(n) Eigenschaft(en) erfüllt!

a) nach oben unbeschränkt
b) streng monoton wachsend und Grenzwert 3
c) alternierend und beschränkt
d) streng monoton fallend und untere Schranke 1
e) alternierend und konvergent
f) Häufungspunkte 2 und 5
g) nach oben und unten unbeschränkt
h) monoton fallend und monoton steigend zugleich
i) alternierende Nullfolge
j) Supremum 5 und Infimum 3
k) genau drei Häufungspunkte
l) Limes inferior 3 und Limes superior 4

8 Gib an, ob es sich um eine arithmetische Folge oder eine geometrische Folge handelt bzw. ob keiner dieser Begriffe zutrifft.

a) $5, 8, 12, 17, 23, 30, ...$

b) $\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, ...$

c) $17, 23, 29, 35, 41, 47, ...$

d) $10, 5, 2.5, 1.25, 0.625, ...$

e) $2, 5, 10, 17, 26, 37, ...$

f) $2, 6, 18, ...$

g) $7.5, 11, 14.5, 18, 21.5, 25, ...$

h) $1, 3, 10, 30, 100, ...$

i) $48, 12, 3, ...$

j) $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, ...$

$\boxed{1}$

a) $3, 6, 30, 870, 756\,030$
b) $0, 3, 8, 15, 24$
c) $0, 2, 6, 12, 20$
d) $2, 3, 6, 18, 108$
e) $-1, 4, -27, 256, -3125$
f) $1, 1, 3, 9, 23$
g) $5, 10, 20, 40, 80$
h) $0, 0, 3, 20, 115$

$\boxed{2}$

a) $a_n = 3 \cdot (n-1)$
b) $a_n = (n+1)^2$
c) $a_n = n \cdot (-1)^n$
d) $a_n = n \cdot (-1)^{n+1} = -n \cdot (-1)^n$
e) $a_n = \frac{n}{n+1}$
f) $a_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$
g) $a_n = (n+1)^2 - 1$
h) $a_n = 2n - 1 = 2 \cdot (n-1) + 1$
i) $a_n = 1 + 0.1^n$
j) $a_n = \frac{10}{n}$
k) $a_n = 4 \cdot 2^n$
l) $a_n = \frac{1}{2n+1}$

$\boxed{3}$ ...

$\boxed{4}$

a) 2
b) $+\infty$
c) 3
d) 5
e) 0
f) 3
g) $e^2 \approx 7.38906$
h) $e^{\ln(5)} = 5$
i) 1
j) $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.36788$
k) 0
l) 0
m) divergent
n) 25
o) 0
p) 4.2
q) 0
r) -2
s) 5
t) $+\infty$

$\boxed{5}$

a) $a_n \to 0, \quad n \geq 999$
b) $a_n \to \frac{3}{5} = 0.6, \quad n \geq 1881$
c) $a_n \to 5, \quad n \geq 2996$
d) $a_n \to 3, \quad n \geq 1505$

$\boxed{6}$ ...

$\boxed{7}$ Es gibt unendlich viele Lösungen, von denen jeweils eine relativ einfache angegeben wird.

a) $a_n = n$
b) $a_n = 3 - \frac{1}{3}$
c) $a_n = (-1)^n$
d) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$
e) $a_n = (-0.5)^n$
f) $a_n = 1.5 \cdot (-1)^n + 3.5$
g) $a_n = (-2)^n$
h) $a_n = 5$
i) $a_n = (-0.3)^n$
j) $a_n = (-1)^n + 4$
k) $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$
l) $a_n = 0.5 \cdot (-1)^n + 3.5$

$\boxed{8}$ ...