1 Berechne den Erwartungswert der Augenzahl, wenn ein gewöhnlicher sechsseitiger Würfel einmal geworfen wird.

2 Es werden zwei gewöhnliche sechsseitige Würfel gleichzeitig geworfen.

a) Berechne den Erwartungswert der Augensumme.

b) Berechne den Erwartungswert der Differenz der Augenzahlen.

c) Berechne den Erwartungswert der höheren der beiden Augenzahlen.

3 Die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Tag regnet, liegt in dieser Region bei 15 %. Der Manager eines Hotels hat die Idee, dass Gäste an Regentagen nur noch 75 % des Standardpreises zahlen müssen. Wie groß muss der Standardpreis sein, damit der Erwartungswert des Zimmerpreises bei 80 € liegt?

4 Bei einem Glücksspiel werden ohne Zurücklegen zwei Kugeln aus einer Box gezogen, die jeweils einen bestimmten Wert haben. Die Zufallsvariable X entspricht der Summe der Werte der gezogenen Kugeln. Folgende Kugeln befinden sich anfangs in der Box:

- 25 weiße Kugeln mit einem Wert von 0 €.
- 10 silberne Kugeln mit einem Wert von 5 €.
- 5 goldene Kugeln mit einem Wert von 20 €.

a) Erstelle eine Tabelle, welche alle möglichen Werte x_i der Zufallsvariable X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ darstellt. Gib alle Wahrscheinlichkeiten als ungekürzten Bruch an und kontrolliere am Ende, ob die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 beträgt.

b) Berechne $E(X)$.

5 Bei einem Glücksspiel wird ein gewöhnlicher sechsseitiger Würfel dreimal geworfen, wobei es folgende Auszahlungen gibt:

Anzahl der Sechser	Auszahlung (in €)
0	0
1	5
2	20
3	100

a) Erstelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilungstabelle für die Zufallsvariable der Auszahlung.

b) Welcher Einsatz muss für eine Teilnahme verlangt werden, damit das Glücksspiel „fair“ ist?

6 Im Videospiel „Mario Party“ kann man zwischen verschiedenen Würfeln wählen. Drei dieser Würfel haben folgende Werte, wobei alle sechs Werte gleich wahrscheinlich sind:

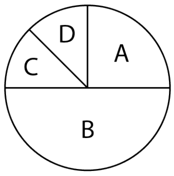
- Würfel A: 1, 1, 1, 4, 4, 9
- Würfel B: 3, 3, 3, 3, 4, 4
- Würfel C: 1, 3, 3, 3, 5, 6

Wie bei vielen anderen Spielen auch, muss man nach dem Würfeln seine Figur bewegen. Die Anzahl der zurückzulegenden Felder entspricht dabei dem Würfelergebnis.

a) Begründe durch mathematische Argumente, mit welchem Würfel man auf lange Sicht am schnellsten vorankommt.

b) Fabian wählt immer Würfel A. Wie wahrscheinlich ist es, dass er in den nächsten zwei Runden mindestens 12 Felder vorrücken kann?

7 Das nachfolgend abgebildete Glücksrad ist in vier Segmente unterteilt, die 90°, 180° und zweimal 45° des Kreises einnehmen. Landet der Zeiger auf Sektor A, so erhält man 0 €. Für Sektor B erhält man 5 €. Für Sektor C sind es 20 € und für Sektor D sogar 50 €. Der Einsatz pro Drehung beträgt 10 €. Die Zufallsvariable X beschreibt den Gewinn für eine Drehung.



a) Berechne den Erwartungswert $E(X)$.

b) Beschreibe durch einen vollständigen Satz, was der in a) berechnete Erwartungswert im gegebenen Sachzusammenhang aussagt.

c) Berechne, bei welchem Einsatz pro Drehung das Glücksspiel „fair" ist, also der Erwartungswert 0 beträgt.

8 Hat man beim „Mensch ärgere dich nicht" keine aktive Spielfigur, so hat man pro Runde drei Versuche, um eine Sechs zu würfeln und dadurch eine neue Spielfigur zu erhalten.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit p, dass man in einer einzigen Runde (also bei drei Würfen) mindestens einen Sechser erzielt.

b) Erstelle mit Hilfe des Summensymbols einen Term, zur Berechnung des Erwartungswertes der notwendigen Runden, um einen Sechser zu erzielen. Verwende dazu die Variable p aus Aufgabe a) sowie die Variable n für die Anzahl der Runden.

c) Berechne den Erwartungswert der Anzahl an Runden, die nötig sind, um einen Sechser zu würfeln. Verwende gegebenenfalls ein geeignetes Computerprogramm.

9 Max und Moritz wollen ein Brettspiel spielen, für welches man einen Würfel benötigt. Dieser ist jedoch nicht aufzufinden. Max hat die Idee, fünf Münzen zu werfen und zu zählen, wie viele Münzen „Kopf" zeigen. Diese Zahl liegt zwischen 0 und 5. Daher will Max zu dieser Anzahl 1 addieren, um dadurch den Würfel zu ersetzen. Gib an, ob dieser Zufallsgenerator gleichwertig zu einem Würfel ist und begründe deine Entscheidung.

10 Eine bestimme Fußgängerampel ist abwechselnd 50 Sekunden rot und anschließend 10 Sekunden grün. Berechne den Erwartungswert für die Wartezeit (in Sekunden) bei dieser Ampel, wenn man zufällig dort ankommt (also die Ankunftszeit einer Gleichverteilung entspricht).

11 Eine U-Bahn-Linie fährt in 5-Minuten-Intervallen von der Station ab. Wie groß ist der Erwartungswert der Wartezeit auf die nächste U-Bahn, wenn jede U-Bahn 30 Sekunden in der Station steht und man zufällig dort ankommt (also die Ankunftszeit einer Gleichverteilung entspricht)?

$\boxed{1}$ 3,5

$\boxed{2}$ a) 7 b) $1{,}9\dot{4}$ c) $4{,}47\dot{2}$

$\boxed{3}$ 83,12 €

$\boxed{4}$ a)

x_i	0	5	10	20	25	40
$P(X = x_i)$	$\frac{600}{1560}$	$\frac{500}{1560}$	$\frac{90}{1560}$	$\frac{250}{1560}$	$\frac{100}{1560}$	$\frac{20}{1560}$

Probe: $\frac{600+500+90+250+100+20}{1560} = \frac{1560}{1560} = 1$

b) $E(X) = (0 \cdot 600 + 5 \cdot 500 + 10 \cdot 90 + 20 \cdot 250 + 25 \cdot 100 + 40 \cdot 20) : 1560 = 7{,}5$

$\boxed{5}$ a)

x_i	0	5	20	100
$P(X = x_i)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

b) $E(X) = (0 \cdot 125 + 5 \cdot 75 + 20 \cdot 15 + 100 \cdot 1) : 216 \approx 3{,}59$ €

Der Erwartungswert der Auszahlung liegt ungefähr bei 3,59 €. Daher sollte der Einsatz ebenfalls 3,59 € betragen.

$\boxed{6}$ a) Würfel C hat die höchste Augensumme (21) und somit den höchsten Erwartungswert für die zurückgelegten Felder pro Zug (3,5).

b) Möglichkeiten: $4+9$, $9+4$, $9+9$, daher $2 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} = 0{,}13\dot{8} = 13{,}\dot{8}\,\%$

$\boxed{7}$ a) 1,25 €

b) Auf lange Sicht beträgt der durchschnittliche Gewinn pro Teilnahme 1,25 €.

c) Der Einsatz müsste um 1,25 € größer werden, also auf 11,25 € steigen, damit der Erwartungswert 0 ist.

$\boxed{8}$ a) ca. 42,13 % b) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1-p)^{n-1} \cdot p$ c) $\frac{1}{p} \approx 2{,}37$

$\boxed{9}$ Man erhält folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Die Werte 3 und 4 sind viel wahrscheinlicher als die Werte 1 und 6. Beim Würfel sind jedoch alle sechs Werte gleich wahrscheinlich. Somit ist dieser Zufallsgenerator nicht gleichwertig zu einem herkömmlichen Würfel.

$\boxed{10}$ $E(X) = \int_0^{50} (50 - x) \cdot \frac{1}{60}\, dx + \int_{50}^{60} 0 \cdot \frac{1}{60}\, dx = 20{,}8\dot{3}\,\mathrm{s}$

$\boxed{11}$ 121,5 s