Arbeitsblatt: Rentenrechnung

Version vom 22. März 2025

1 Jemand nimmt einen Kredit in Höhe von 75 000 € auf. Als Zinssatz werden 6 % p.a. vereinbart. Die Schuld soll durch 10 gleich hohe Jahresraten beglichen werden, wobei die erste Ratenzahlung ein Jahr nach der Kreditaufnahme erfolgt. Berechne die Höhe der Raten.

2 Für den Kauf eines Grundstücks werden anstelle einer einmaligen Sofortzahlung 10 Jahre lang jedes Quartalsende 3000 € an den Verkäufer gezahlt. Diesen Raten liegt ein Zinssatz von 5 % p.a. zugrunde. Berechne den Barwert des Grundstücks.

3 Frau Müller ging am 01.01.2023 in Pension. Durch eine private Pensionsversicherung hat sie 250 000 € angespart, welche innerhalb der nächsten 15 Jahre durch jeweils gleich große jährliche Zahlungen vollständig ausgezahlt werden sollen. Der Zinssatz beträgt 2,5 % p.a. und die Zahlungen erfolgen jeweils am Jahresanfang. Berechne die Höhe der jährlichen Auszahlung.

4 Ein heute aufgenommener Kredit in Höhe von 30 000 € soll durch eine nachschüssige Jahresrente mit 10 Raten zu je 3500 € zurückgezahlt werden. Berechne den Zinssatz dieser Rente.

5 Ein Kredit in Höhe von 25 000 € sollte ursprünglich durch 10 nachschüssige Jahresraten in Höhe von 3237,61 € zurückgezahlt werden. Der Jahreszinssatz beträgt dabei 5 %. Nach 3 vollendeten Zahlungen muss die Person die Rückzahlung des Kredits für ein Jahr pausieren. Wie hoch müssen die verbleibenden 6 Raten sein?

6 Jemand kauft ein Grundstück und zahlt dafür 13 Mal jährlich vorschüssig 2398,34 €. Der Jahreszinssatz beträgt 2,5 %. Durch einen unerwarteten Gewinn kann die Person anstelle der 5. Jahresrate gleich den gesamten ausständigen Betrag zahlen. Berechne die Höhe dieser Zahlung.

7 Erstelle aus der nachfolgenden Formel für den Endwert einer nachschüssigen Jahresrente eine Formel zur Berechnung der Jahre n.

$$E_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

8 Eine Schuld von 5000 € soll durch monatliche Raten von 200 € zurückgezahlt werden. Der vereinbarte Monatszinssatz beträgt 0,5 %. Die erste Zahlung erfolgt in genau einem Monat.

a) Berechne die Anzahl der Vollraten.

b) Berechne den Restbetrag, der gleichzeitig mit der letzten Vollrate bezahlt wird.

9 Jemand kauft heute einen neuen Computer um 1399 €. Es besteht die Möglichkeit, diesen Betrag durch 12 nachschüssige Monatsraten zu je 122,77 € zu bezahlen. Berechne den effektiven Jahreszinssatz dieser Rente!

10 In unterschiedlichen Büchern findet man häufig unterschiedliche Formeln für ein und dieselbe Sache. Beispielsweise gibt es für die Berechnung des Barwerts einer vorschüssigen Rente folgende Formeln:

$$B_1 = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}} \qquad B_2 = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q^{1-n} \qquad B_3 = R \cdot \frac{1 - q^{-n}}{q - 1} \cdot q$$

Zeige durch mathematische Umformungen und dazu passende Erklärungen, dass diese drei Formeln tatsächlich gleichwertig sind.

11 Frau Kern hat im Lotto 900 000 € gewonnen. Davon möchte sie ein Drittel sofort zur Verfügung haben. Den Rest investiert sie in ETFs und geht von einer jährlichen Rendite von 7 % aus.

a) Wie viele nachschüssige Jahresraten in Höhe von 100 000 € kann sie dadurch erhalten, bis das gesamte in ETFs investierte Vermögen ausgezahlt ist?

b) Welchen Betrag könnte sie jährlich nachschüssig auf unbegrenzte Zeit auszahlen („ewige Rente“)?

12 Ordne den vier Beschreibungen den richtigen Term (A bis E) zu. Der Zinssatz beträgt für die gesamte Aufgabe $i = 5\,\%$ und die Ratenhöhe ist jeweils 200 €.

- Barwert einer vorschüssigen Semesterrente mit einer Laufzeit von 5 Jahren: _____
- Endwert einer nachschüssigen Jahresrente mit einer Laufzeit von 10 Jahren: _____
- Barwert einer nachschüssigen Monatsrente mit insgesamt 10 Raten: _____
- Endwert einer vorschüssigen Semesterrente mit insgesamt 10 Raten: _____

(A) $200\cdot\dfrac{\sqrt{1{,}05}^{10}-1}{\sqrt{1{,}05}-1}\cdot\sqrt{1{,}05}$ (B) $200\cdot\dfrac{1{,}05^{10}-1}{1{,}05-1}$ (C) $200\cdot\dfrac{\sqrt[12]{1{,}05}^{10}-1}{\sqrt[12]{1{,}05}-1}$

(D) $200\cdot\dfrac{\sqrt{1{,}05}^{10}-1}{\sqrt{1{,}05}-1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1{,}05}^{9}}$ (E) $200\cdot\dfrac{1-\sqrt[12]{1{,}05}^{-10}}{\sqrt[12]{1{,}05}-1}$

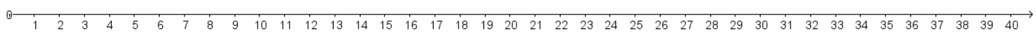
13 Gib jeweils an, was mit den folgenden Formeln, die nicht den Schreibweisen der Formelsammlung entsprechen, berechnet wird. Schreibe dazu in die Kästchen entweder E_{nach}, E_{vor}, B_{nach} oder B_{vor}.

$$\boxed{\qquad} = R\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\cdot q^{-n}$$

$$\boxed{\qquad} = R\cdot\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$$

14 Jemand legt zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Betrag von 25 000 € für die Dauer von 10 Jahren auf ein mit 3 % p.a. verzinstes Konto. Anschließend möchte sich die Person den am Konto vorhandenen Betrag über 20 Jahre hinweg durch gleich große jährliche Zahlungen auszahlen lassen, wobei die erste Zahlung sofort nach Ablauf der 10 Jahre, also zum Zeitpunkt $t = 10$, erfolgt. Bis zur letzten Zahlung wird das Konto durchgehend mit 3 % p.a. verzinst. Nach der letzten Zahlung ist das Konto leer.

a) Veranschauliche alle Ein- und Auszahlungen auf der abgebildeten Zeitachse.



b) Berechne, welchen Betrag die Person jährlich ausgezahlt bekommt.

15 Jemand zahlt 38 Jahre lang jedes Monatsende 50 € auf ein privates Pensionskonto. Der Zinssatz beträgt 1,25 % p.a. Anschließend wird das Angesparte über einen Zeitraum von 12 Jahren in gleichen monatlichen Raten ausbezahlt. Die erste Auszahlung erfolgt ein Monat nach der letzten Einzahlung.

a) Berechne den äquivalenten Monatszinssatz!

b) Berechne, welcher Betrag sich unmittelbar nach der letzten Einzahlung am Pensionskonto befindet.

c) Berechne die Höhe der monatlichen Auszahlungen.

1

2

3

4

5 Vollständiger Lösungsweg:

6

7 $n = \frac{\ln\left(\frac{E_{\text{nach}} \cdot (q-1)}{R} + 1\right)}{\ln(q)}$

8

9

10

11

12 D, B, E, A

13

14

15